Polynômes

- Révision du programme précédent.
- Idéal de $\mathbb{K}[X]$, les idéaux de $\mathbb{K}[X]$ sont principaux.
- PGCD et PPCM de n polynômes. Définition à l'aide des idéaux. Caractérisation pratique à l'aide de la relation "divise".
- Relation de Bézout.
- Irréductibles de $\mathbb{K}[X]$, décomposition en facteurs irréductibles.
- Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle. Cas des pôles simples. Application à la décomposition de P'/P.

Algèbre linéaire

- Famille génératrice (finie ou infinie), famille libre (finie ou non), base.
- Sommes et sommes directes de p sous-espaces vectoriels, caractérisation avec l'intersection, sous-espaces vectoriels supplémentaires.
- Concaténation des bases, base adaptée à une somme directe.
- Applications linéaires, détermination de $\text{Im}(f)$, de $f(E')$ si $E' = \text{Vect}\,\{x_i \;/\; i \in I\}$, de $\text{Ker}\,(f)$.
- Si $E = \displaystyle\bigoplus_{k=1}^{p} E_k$, alors toute application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est entièrement définie par ses restrictions aux E_k. Pour montrer que $f = g$ avec $f, g \in \mathscr{L}(E, F)$, il suffit de mq pour tout k, $f_{|E_k} = g_{|E_k}$.
- Projecteurs associés à une somme directe. Projecteurs, éléments caractéristiques.
- Rang d'une application linéaire. Théorème d'isomorphisme : si $E = \text{Ker}\,(f) \oplus F$ alors $f_{|F}$ réalise un isomorphisme entre F et $\text{Im}(f)$. Théorème du rang lorsque E est de dimension finie. Théorème du rang appliqué à une restriction $f_{|F}$ ou $f_{|\,\text{Im}(g)}$.
- Isomorphismes d'espaces vectoriels, conservation des bases par un isomorphisme.
- Hyperplan, diverses caractérisations (dimension, noyau de forme linéaire non nulle, supplémentaire d'une droite vectorielle), base duale d'une base de E, décomposition $\varphi = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) e_i^*$, équation d'hyperplan.

Exercices de la banque CCINP et preuves à connaître

- Un idéal de $\mathbb{K}[X]$ est de la forme $A\mathbb{K}[X]$ (et on peut imposer A unitaire)
- Caractérisation du PGCD (resp. PPCM) de n polynômes.
- La somme $E_1 + ... + E_p$ est directe si et seulement si pour tout $k = 2...p$, $E_k \cap (E_1 + ... + E_{k-1}) = \{0_E\}$.
- Soient $E = \displaystyle\bigoplus_{k=1}^{p} E_k$ et pour tout $k \in \mathbb{N}_p$, $f_k \in \mathscr{L}(E_k, F)$, alors il existe un unique $f \in \mathscr{L}(E, F)$ tel que pour tout k, $f_{|E_k} = f_k$.
- Base duale, définition, expression d'une forme linéaire dans une telle base. Equation d'hyperplan.
- CCINP n° 59 (1. et 2.), 60, 64,

programme suivant : *Matrices, matrices par blocs, stabilité d'un sev, déterminants. Début de la réduction ?*