

Algèbre linéaire

- Révision du programme précédent.
- Matrice d'application linéaire, somme et produit matriciel. Structure d'espace vectoriel de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ et d'algèbre de $M_n(\mathbb{K})$, base canonique, produit $E_{i,j}E_{k,\ell}$, ...
- Matrices définies par blocs ; somme et produit de telles matrices.
- Caractérisation matricielle de la stabilité d'un sev : F est un sev stable par f ssi la matrice de f dans une base adaptée est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ et $A = \text{Mat}_{B_F}(f|_F)$. Si $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$ alors les E_i sont f -stables ssi dans une base adaptée à la somme directe, la matrice de f est diagonale par blocs.
- Si f et g commute alors $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont stables par g .
- Formule de changement de bases pour un endomorphisme ou une matrice carrée.
- Matrices carrées semblables, exemple. Conservation du rang, de la trace et du déterminant par similitude.
- Déterminant : formule théorique, développement par rapport à une rangée, règles de calculs, calcul d'un déterminant de Vandermonde, polynôme caractéristique d'une matrice compagnon, déterminant d'une matrice trigonale par blocs.
- Formule $A \cdot {}^t \text{com}(A) = {}^t \text{com}(A) \cdot A = |A| \cdot I_n$.

Valeurs et vecteurs propres

- Valeurs propres, spectre (dimension finie), vecteurs propres, sous-espaces propres d'un endomorphisme et d'une matrice carrée. λ est valeur propre de f si et seulement si $f - \lambda \cdot \text{Id}_E$ non injectif. Si E de dimension finie, f est inversible ssi 0 n'est pas valeur propre de f .
- Si P est annulateur de f alors les valeurs propres de f sont des racines de P .
- Si f est inversible, les valeurs propres de f^{-1} sont les inverses des valeurs propres de f .
- Les sous-espaces propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont en somme directe.
- Polynôme caractéristique (unitaire) $\chi_A(X) = \det(X \cdot I_n - A) = X^n - (\text{tr } A)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$.
- Si λ est d'ordre d dans χ_f alors $1 \leq \dim E_\lambda(f) \leq d$. Les sep associés à des valeurs propres simples sont de dimension 1.
- Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique, de même que A et ${}^t A$.

Exercices de la banque CCINP et preuves à connaître

- Déterminant de Vandermonde et formule de récurrence pour le déterminant d'une matrice tridiagonale.
- Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon.
- Si F est stable par f alors $\chi_{f|_F}$ divise χ_f .
- Polynôme caractéristique d'une matrice transposée, de deux matrices semblables.
- Si λ est d'ordre d dans χ_f alors $1 \leq \dim E_\lambda(f) \leq d$.
- CCINP n° 70, 71, 73.

programme suivant : Toute la réduction des endomorphismes et matrices carrées.