Diagonalisation

- Révision du programme précédent sur les éléments propres.
- Soit E evdf et $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors f est diagonalisable ssi il existe une base de vecteurs propres de f ssi $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} E_\lambda(f)$ ssi (χ_f est scindé et chaque dim $E_\lambda(f)$ = ordre de λ dans χ_f) ssi $\dim(E) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim(E_\lambda(f))$.
- Si f admet $n(=\dim(E))$ valeurs propres distinctes alors f est diagonalisable. Réciproque fausse.
- Etude pratique de la diagonalisation en dimension 3.

Trigonalisation

- f est trigonalisable ssi χ_f est scindé.
- Endomorphismes nilpotents : f est nilpotent ssi (f est trigonalisable et 0 est seule valeur propre) ssi $\chi_f(X) = X^n$ ssi f est représentée par une matrice triangulaire supérieure stricte dans une certaine base.

Polynômes d'endomorphismes et matriciels

- Morphisme d'algèbres $P \mapsto P(f)$, polynôme minimal (générateur unitaire de l'idéal des polynômes annulateurs). Si d =deg (Π_f), alors $\mathbb{K}[f] = \mathrm{Vect}(Id_E, f, f^2, ..., f^{d-1})$ et $\dim \mathbb{K}[f] = d$.
- CNS pour que $P(f)$ soit inversible avec Π_f et χ_f.
- Lien entre Π_f et χ_f : ils ont les mêmes facteurs irréductibles et théorème de Cayley-Hamilton.
- Théorème de décomposition des noyaux.
- f est diagonalisable ssi il existe un polynôme annulateur scindé simple ssi Π_f est scindé simple.
- f est trigonalisable ssi Π_f scindé.

Sev caractéristiques

- $\Gamma_i = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda_i.Id_E)^{c_i}$ avec $\chi_f(X) = \prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{c_i}$. Γ_i est f-stable, $E = \bigoplus_{i=1}^{r} \Gamma_i$ et $\dim \Gamma_i = c_i$.
- Application à l'existence de la décomposition de Dunford.

À connaître

- f est trigonalisable si et seulement si χ_f est scindé.
- Existence du polynôme minimal.
- Si P annulateur de f, les valeurs propres de f figurent parmi les racines de P.
- Si d =deg (Π_f), alors $\mathbb{K}[f] = \mathrm{Vect}(Id_E, f, f^2, ..., f^{d-1})$ et $\dim \mathbb{K}[f] = d$.
- Théorème de décomposition des noyaux
- f est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme annulateur de f, scindé simple.
- Les sev caractéristiques sont stables, en somme directe $=E$ et leur dim vaut l'ordre de multiplicité de λ_i dans χ_f.
- CCINP 68, 70, 73

programme suivant : *Espaces vectoriels normés.*