Espaces vectoriels normés

- Norme sur un $\mathbb{K}$-ev ; exemples sur $\mathbb{R}^n$ ou un evdf, sur $\mathscr{C}([a,b])$ avec $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ ou $\|.\|_\infty$.
- Exemple avec les espaces préhilbertiens réels, inégalité de Cauchy Schwarz, norme euclidienne.
- Normes équivalentes ; les trois normes usuelles sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$ mais pas sur $\mathscr{C}([a,b])$.
- Boules ouvertes, fermées, sphères. Représentation dans $\mathbb{R}^2$.
- Algèbre unitaires normées, distance, toute norme définit une distance. Réciproque fausse.
- Fonctions bornées sur une partie A de E muni de $\|.\|_\infty$, parties bornées, distance entre parties.
- Produit cartésien d'evn, norme produit.
- Applications lipschitziennes.
- Distance à une partie, l'application $x \mapsto \mathrm{d}(x, A)$ est 1-lipschitzienne.
- Distance à un sev de dimension finie dans un espace préhilbertien, projection orthogonale et caractérisation (révision de MPSI)

À connaître

- Si $A \subset \mathbb{R}$ non vide et bornée. Alors $\mathrm{Diam}(A) = \mathrm{Sup}\, A - \mathrm{Inf}\, A$.
- Soit $A \subset E$, alors $x \mapsto \mathrm{d}(x, A)$ est 1-lipschitzienne.
- Espace vectoriel normé produit. Détermination de $B((a_1, ..., a_p), r)$ en fonction des $B_i(a_i, r)$.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz avec la CNS d'égalité (pour un ev préhilbertien réel)
- Savoir justifier les normes et les produits scalaires usuels.
- CCINP 76, 81, 82.

---

programme suivant : *Suites et séries vectorielles, continuité des fonctions vectorielles en un point.*