Suites et séries de fonctions numériques

- Révision du programme précédent sur les suites de fonctions.
- Divers modes de convergence des séries de fonctions : CV simple, CV absolue, CV uniforme, CV uniforme sur tout segment, CV normale.
- Lien entre les CV. La convergence normale implique la convergence uniforme.
- Inégalité triangulaire lorsque la série converge normalement.
- Théorème de passage à la limite dans $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.
- Continuité de $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.
- Dérivation terme à terme de $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$. Généralisation à l'ordre k.
- Pour montrer $f \in \mathscr{C}^\infty(I)$, pas de résultat spécifique : montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f \in \mathscr{C}^k(I)$.
- Commutation d'une série et d'une intégrale sur un segment avec la convergence uniforme sur $[a, b]$.
- Fonction de Riemann et Riemann alternée : domaines de définition, modes de convergence, limites aux bornes, continuité, dérivabilité.

À connaître

- Enoncés très précis du théorème de la double limite, du théorème de continuité, de dérivabilité à l'ordre 1 et k pour une série de fonctions.
- Théorème de commutation série/intégrale sur un segment.
- La convergence normale implique la convergence uniforme et contre exemple pour la réciproque.
- Toutes les propriétés des fonctions de Riemann et Riemann alternée (définition, modes de convergence, continuité, régularité, limites aux bornes du domaine de définition).
- Théorème des moments : si f est continue sur $[a, b]$ à valeurs réelles et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_a^b t^n f(t)\mathrm{d}t = 0$ alors $f = \widetilde{0}$.
- CCINP n°16, 17

---

programme suivant : *Séries entières.*