Séries entières

- Définition d'une série entière complexe $\sum_{n\geqslant 0} u_n(z)$ ou $\sum a_n z^n$.
- Lemme d'Abel et application aux divers modes de convergence d'une série entiére. Diverses définitions du rayon de convergence.
- Règle de D'Alembert avec soit $\left|\dfrac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right|$, soit $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ pour une série non lacunaire.
- Unicité des coefficients d'une série entière.
- Somme de deux séries entières, produit (de Cauchy) de deux séries entières.
- Continuité d'une série entière sur le disque de convergence.
- Théorème radial d'Abel pour une série réelle : Si $\sum a_n x^n$ est de rayon R et que $\sum a_n R^n$ converge alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x\to R^-}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$.
- Série dérivée complexe $\sum n a_n z^{n-1}$: elle a même rayon que la série $\sum a_n z^n$. Généralisation aux séries dérivées p fois ou intégrées p fois.
- Caractère $\mathscr{C}^\infty$ d'une série entière réelle et dérivation terme à terme.
- Fonctions développables en série entière. Si f est DSE sur $]-r,r[$ alors f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r,r[$. Si f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r,r[$ et qu'il existe $M\geqslant 0$ tel que pour tout n et pour tout $x\in]-r,r[$, $|f^{(n)}(x)|\leqslant M$ alors f est DSE sur $]-r,r[$.
- DSE usuels : $e^x, \sin(x), \cos(x), \dfrac{1}{1-x}, \mathrm{sh}(x), \mathrm{ch}(x), (1+x)^\alpha, \ln(1+x), \mathrm{Arctan}(x), \mathrm{Arcsin}(x)$ et avec égalité éventuelle aux bornes de l'intervalle via le théorème radial.
- Solution développable en série entière d'une équation différentielle. Exemple avec $x\mapsto(1+x)^\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$.
- Fonction exponentielle complexe, propriété.

À connaître

- Les DSE usuels doivent être connus parfaitement, doivent pouvoir être retrouvés ainsi que leurs domaines de validité.
- Lemme d'Abel : si $(a_n r^n)$ est borné alors pour $z\in\mathbb{C}$ / $|z|<r$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
- Les 4 définitions équivalentes du rayon de convergence :

$$\begin{aligned} R &= \mathrm{Sup}\{r\in\mathbb{R}^+ \ / \ (a_n r^n) \text{ borné}\} \\ &= \mathrm{Sup}\{r\in\mathbb{R}^+ \ / \ a_n r^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\} \\ &= \mathrm{Sup}\{r\in\mathbb{R}^+ \ / \ \sum a_n r^n \text{ convergente}\} \\ &= \mathrm{Sup}\{r\in\mathbb{R}^+ \ / \ \sum a_n r^n \text{ absolument convergente}\} \end{aligned}$$

- Recherche du DSE de $(1+x)^\alpha$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$, savoir l'appliquer à $\alpha=\dfrac{1}{2}$ et $\alpha=-\dfrac{1}{2}$.
- Une série entière et sa série dérivée ont le même rayon de convergence. Application au caractère $\mathscr{C}^1$ puis $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[$ d'une série entière à variable réelle.
- Si R_1 (resp. R_2) est le rayon de $\sum a_{2n}x^{2n}$ (resp. $\sum a_{2n+1}x^{2n+1}$) alors le rayon de $\sum a_n x^n$ est $\mathrm{Min}(R_1,R_2)$.
- CCINP 18, 20, 21.

programme suivant : *Intégration sur un intervalle quelconque.*