# Intégration sur un intervalle

- Définition d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle.
- Définition d'une intégrale convergente pour $f \in \mathscr{C}_m([a,b[)$, $f \in \mathscr{C}_m(]a,b])$ ou $f \in \mathscr{C}_m(]a,b[)$.
- Fausse intégrale impropre (prolongement par continuité en un point critique).
- Intégrales de références : Riemann et exponentielle
- Propriétés : linéarité, reste d'intégrales impropres convergentes, relation de Chasles.
- Cas des fonctions positives : positivité de l'intégrale, croissance, théorème de comparaison des fonctions positives : exemple avec les intégrales de Bertrand (à savoir rejustifier à chaque utilisation).
- Exemple de fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$ mais qui ne tend pas vers 0 en $+\infty$.
- Changement de variable ($\varphi$ bijective strictement croissante de classe $\mathscr{C}^1$) et intégration par parties pour une intégrale impropre.
- Fonctions intégrables sur $I$ : définition, l'intégrabilité sur $i$ assure que $\displaystyle\int_I f$ converge. Réciproque fausse. Exemple avec $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ sur $[1,+\infty[$.
- Inégalité triangulaire.
- Théorème de comparaison sur les fonctions intégrables et sommation des relations de comparaison.

# À connaître

- Enoncé et preuve intégrales de Bertrand.
- Énoncé et démonstrations des sommations des relations de comparaison pour les intégrales.
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ est convergente mais $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$.
- Revoir le tableau des primitives usuelles ainsi que les méthodes de calculs de primitives (ci-dessous) $\displaystyle\int F(x)\mathrm{d}x, \int F(\sin x, \cos x)\ dx, \int F(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\ dx, \int F(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\ dx, \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\ dx$ avec $F$ une fraction rationnelle à 1 ou 2 indéterminées ( cf ci-après )

**Chaque élève devra avoir un calcul (pas trop lourd) de valeur d'intégrale impropre convergente.**

- CCINP 28

---

***programme suivant :*** *Intégrales à paramètre.*

## Tableau des primitives usuelles

*$F$ désigne une primitive de $f$ sur l'intervalle de travail.*

| $I$ | $f(x)$ | $F(x)$ |
|---|---|---|
| $\mathbb{R}^{*+}$ | $x^\alpha, \alpha \neq 1$ | $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ |
| $\mathbb{R}^{*+}$ *ou* $\mathbb{R}^{*-}$ | $\frac{1}{x}$ | $\ln\lvert x\rvert$ |
| $\mathbb{R}$ | $e^x$ | $e^x$ |
| $\mathbb{R}$ | $a^x, a > 0, a \neq 1$ | $\frac{a^x}{\ln a}$ |
| $\mathbb{R}$ | $\sin x$ | $-\cos x$ |
| $\mathbb{R}$ | $\cos x$ | $\sin x$ |
| $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ | $\tan x$ | $-\ln\lvert\cos x\rvert$ |
| $]0, \pi[$ | $\operatorname{cotan} x$ | $\ln\lvert\sin x\rvert$ |
| $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ | $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ | $\tan x$ |
| $\mathbb{R}$ | $\operatorname{sh} x$ | $\operatorname{ch} x$ |
| $\mathbb{R}$ | $\operatorname{ch} x$ | $\operatorname{sh} x$ |
| $\mathbb{R}$ | $\operatorname{th} x$ | $\ln(\operatorname{ch} x)$ |
| $\mathbb{R}^{*+}$ *ou* $\mathbb{R}^{*-}$ | $\coth x$ | $\ln(\operatorname{sh} x)$ |
| $\mathbb{R}$ | $\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x$ | $\operatorname{th} x$ |
| $\mathbb{R}^{*+}$ *ou* $\mathbb{R}^{*-}$ | $\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$ | $-\coth x$ |
| $]0, \pi[$ | $\frac{1}{\sin x}$ | $\ln\left\lvert\tan\frac{x}{2}\right\rvert$ |
| $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ | $\frac{1}{\cos x}$ | $\ln\left\lvert\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert$ |
| $]-1, 1[$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\operatorname{Arcsin} x$ |
| $]-a, a[$ | $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}, a > 0$ | $\operatorname{Arcsin}\frac{x}{a}$ |
| $\mathbb{R}$ | $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ | $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$ |
| $\mathbb{R}$ | $\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}, a > 0$ | $\ln(x + \sqrt{a^2+x^2})$ |
| $]1, +\infty[$ *ou* $]-\infty, -1[$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ | $\ln\lvert x + \sqrt{x^2-1}\rvert$ |
| $]a, +\infty[$ *ou* $]-\infty, -a[$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}, a > 0$ | $\ln\lvert x + \sqrt{x^2-a^2}\rvert$ |
| $\mathbb{R}$ | $\frac{1}{x^2+1}$ | $\operatorname{Arctan} x$ |
| $\mathbb{R}$ | $\frac{1}{x^2+a^2}, a > 0$ | $\frac{1}{a}\operatorname{Arctan}\frac{x}{a}$ |
| $]-1, 1[$ | $\frac{1}{1-x^2}$ | $\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert$ |
| $]-a, a[$ | $\frac{1}{a^2-x^2}, a > 0$ | $\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert$ |

## Calcul de primitives

*Soit $I$ un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$ ;*
*Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. On sait qu'une primitive de $f$ sur $I$ est $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.*
*On notera $F$ une primitive de $f$ sur $I$. On peut calculer $F$ par :*
*- changement de variable.*
*- intégration par parties.*
*- des méthodes plus particulières étudiées ci-dessous combinant ces deux notions.*

### Primitives de $f : x \mapsto P(x)e^{mx}$ où $P$ polynôme de degré $d$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

*L'idée est de faire des intégrations par parties successives pour diminuer le degré du polynôme $P$.*
*On obtient $F(x) = \mathrm{e}^{mx}\left[\dfrac{P(x)}{m} - \dfrac{P'(x)}{m^2} + \cdots + \dfrac{(-1)^d P^{(d)}(x)}{m^{d+1}}\right]$ à une constante près.*

### Primitives de $f : x \mapsto P(x)\cos(mx)$ où $P$ polynôme de degré $d$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

*On applique la formule d'Euler $\cos(mx) = \dfrac{e^{imx}}{2} + \dfrac{e^{-imx}}{2}$ et on est ramené au calcul de deux primitives du type précédent.*

### Primitives de $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{(x^2+1)^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

*La méthode consiste à faire une **intégration par parties dans** $F_{n-1}(x)$.*
*On pose $u(t) = \dfrac{1}{(t^2+1)^{n-1}}$, $v'(t) = 1$. On obtient :*

$$\begin{aligned}
F_{n-1}(x) &= \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + 2(n-1)\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t \\
&= \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + 2(n-1)\int_0^x \frac{t^2+1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t - 2(n-1)\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t \\
&= \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + 2(n-1)F_{n-1}(x) - 2(n-1)F_n(x)
\end{aligned}$$

*On obtient ainsi une relation de récurrence.*
*Connaissant $F_0(x) = 1$ et $F_1(x) = x$, on déduit $F_n(x)$ de proche en proche.*

### Primitives de $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{(x-a)^n}$ avec $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$

*Si $n \geqslant 2$ : $F_n(x) = \frac{1}{(n-1)}\frac{-1}{(x-a)^{n-1}}$ à une constante complexe près sur chaque intervalle de définition.*
*Pour $n = 1$, $F_1(x) = \ln|x-a|$*

### Primitives de $f : x \mapsto \dfrac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$ avec $a, b, p, q \in \mathbb{R}$ et $p^2 - 4q < 0$

- On transforme le dénominateur sous forme canonique : $x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$ qui est de la forme $(x+c)^2+d^2$ avec $c, d \in \mathbb{R},\ d > 0$.
- On écrit alors :
  $\dfrac{ax+b}{(x^2+px+q)^n} = \dfrac{a}{2}\dfrac{2(x+c)}{((x+c)^2+d^2)^n} + \dfrac{b-ac}{((x+c)^2+d^2)^n}$.
  On obtient donc $F(x) = \dfrac{a}{2}\displaystyle\int \frac{2(x+c)}{((x+c)^2+d^2)^n}\mathrm{d}x + (b-ac)\int \frac{1}{((x+c)^2+d^2)^n}\mathrm{d}x$.

  - La première primitive se calcule simplement car du type "$\dfrac{u'}{u^n}$".

- Pour la deuxième, le changement de variable "$x+c=du$" ramène au calcul de $\displaystyle\int_{X_0}^{X}\frac{1}{(u^2+1)^n}du$ que l'on a vu plus haut.

### Primitives d'une fraction rationnelle

*Décomposer $f$ en éléments simples et se ramener aux calculs précédents.*

### Primitives d' une expression rationnelle en sinus et cosinus

*Pour des expressions polynômiales et rationnelles de sin$(t)$ et cos$(t)$ (et $\tan(t)$ !), on vérifiera si la "règle" suivante est vérifiée :*
*- Si $f(t)\,\mathrm{d}t$ est invariant par le changement de variable $u=\pi-t$, poser $u=\sin(t)$*
*- Si $f(t)\,\mathrm{d}t$ est invariant par le changement de variable $u=-t$, poser $u=\cos(t)$*
*- Si $f(t)\,\mathrm{d}t$ est invariant par le changement de variable $u=t+\pi$, poser $u=\tan(t)$*

*Si cette méthode n'est pas utilisable, on se ramène à une fraction rationnelle par le changement de variable $u=\tan(\frac{t}{2})$. On rappelle que $\sin(t)=\frac{2u}{1+u^2}$ et $\cos(t)=\frac{1-u^2}{1+u^2}$.*

### Primitives d'une expression rationnelle en sh et ch

*On fait le changement de variable $u=e^t$ en écrivant ch et sh avec les formes exponentielles.*

### Primitives d'une expression rationnelle en $t$ et $\sqrt[n]{\dfrac{at+b}{ct+d}}$

*On fait le changement de variable $u=\sqrt[n]{\dfrac{at+b}{ct+d}}$ afin de se ramener à une fraction rationnelle en $u$.*

### Primitives d'une expression rationnelle en $t$ et $\sqrt{at^2+bt+c}$ avec $a\neq 0$.

*Par exemple $f(t)=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+t+1}}$.*
*- On met sous forme canonique $at^2+bt+c=a((t-p)^2\pm q^2)$.*
*- On fait le changement de variable $t-p=qu$ et on est ramené à une expression rationnelle $G(u,\sqrt{u^2+1})$ ou $G(u,\sqrt{u^2-1})$ ou $G(u,\sqrt{1-u^2})$.*
*- Pour $G(u,\sqrt{u^2+1})$, on fera le CV $u=\operatorname{sh}v$ et on est ramené à une fraction rationnelle en $\operatorname{ch}v$ et $\operatorname{sh}v$ vue plus haut.*
*- Pour $G(u,\sqrt{1-u^2})$, on fera le CV $u=\cos v$ ou $u=\sin v$ et on est ramené à une fraction rationnelle en $\cos v$ et $\sin v$ vue plus haut.*
*- Pour $G(u,\sqrt{u^2-1})$, on fera le CV $u=\operatorname{ch}v$ ou $u=-\operatorname{ch}v$ (selon que $I\subset[1,+\infty[$ ou $I\subset]-\infty,-1]$) et on est ramené à une fraction rationnelle en $\operatorname{ch}v$ et $\operatorname{sh}v$ vue plus haut.*

## Exemples

**1)** Calcul de $I=\displaystyle\int_0^1(t^2+1)e^{-t}\mathrm{d}t$ :

On fait une IPP en posant $u(t)=t^2+1$ d'où $I=[-(t^2+1)e^{-t}]_0^1+2\displaystyle\int_0^1 te^{-t}\mathrm{d}t$.

Dans la deuxième intégrale, on refait une IPP avec $u=t$ d'où $\displaystyle\int_0^1 te^{-t}\mathrm{d}t=[-te^{-t}]_0^1+\int_0^1 e^{-t}\mathrm{d}t=1-\frac{2}{e}$.

Au total, en reportant ce résultat, $I=3-\dfrac{6}{e}$.

**2)** Calcul de $I=\displaystyle\int_0^1\frac{t^2}{(t^2+1)^3}\mathrm{d}t$ :

La décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ est directe en remarquant que $t^2=(1+t^2)-1$ ce qui donne

$$\frac{t^2}{(t^2+1)^3}=\frac{1}{(t^2+1)^2}-\frac{1}{(t^2+1)^3}.$$

On fait une IPP dans $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = [\operatorname{Arctan} t]_0^1 = \frac{\pi}{4}$, en posant $u(t) = \dfrac{1}{t^2+1},\ u'(t) = \dfrac{-2t}{(1+t^2)^2}$ d'où :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t &= \left[\frac{t}{1+t^2}\right]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} + 2\int_0^1 \frac{(1+t^2)-1}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} + 2\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t - 2\int_0^1 \frac{1}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Il reste donc

$$\int_0^1 \frac{1}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}.$$

On refait une IPP dans cette dernière intégrale avec $u(t) = \dfrac{1}{(t^2+1)^2},\ u'(t) = \dfrac{-4t}{(1+t^2)^3}$ d'où :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t &= \left[\frac{t}{(1+t^2)^2}\right]_0^1 + 4\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^3}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4} + 4\int_0^1 \frac{(1+t^2)-1}{(1+t^2)^3}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4} + 4\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t - 4\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^3}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Il reste donc

$$\int_0^1 \frac{1}{(t^2+1)^3}\mathrm{d}t = \frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4}.$$

Au total,

$$I = \frac{\pi}{32}.$$

**3)** Calcul de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ :
La fonction à intégrer est continue sur $[0,1]$. Le changement de variable $x = \sin(t)$ donne

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{\sin(t)+\cos(t)}\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\tan(t)+1}\mathrm{d}t.$$

$t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{\sin(t)+\cos(t)}\mathrm{d}t$ étant invariant par $t \mapsto \pi + t$, on fait le changement de variable $u = tan(t)$ qui est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et à dérivée non nulle d'où, par théorème de changement de variable dans les intégrales impropres :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u}.\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u$$

qui est bien une intégrale convergente avec les tests de Riemann. Or

$$\frac{1}{(1+u)(1+u^2)} = \frac{1}{2(1+u)} - \frac{1}{2}.\frac{u-1}{1+u^2} = \frac{1}{2(1+u)} - \frac{1}{4}.\frac{2u}{1+u^2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{1+u^2}$$

donc

$$\int_0^X \frac{1}{1+u}.\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\ln(1+X) - \frac{1}{4}\ln(1+X^2) + \frac{1}{2}.\operatorname{Arctan} X = \underbrace{\ln\left(\frac{(1+X)^{1/2}}{(1+X^2)^{1/4}}\right)}_{\underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 0} + \frac{1}{2}.\operatorname{Arctan} X.$$

Donc avec $X \to +\infty$,

$$I = \frac{\pi}{4}.$$

**4)** Calcul de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t+\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t$ :

On fait le changement de variable $u = \sqrt{1-t}$, $t = 1-u^2$ ce qui ramène à

$$I = 2\int_0^1 \frac{u}{1+u-u^2}\mathrm{d}u = 2\int_0^1 \frac{u}{\frac{5}{4}-\left(\frac{1}{2}-u\right)^2}\mathrm{d}u.$$

On fait le nouveau changement de variable $\frac{1}{2}-u = \frac{\sqrt{5}}{2}.v$ ie $u = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{2}.v$ et $v = \dfrac{1-2u}{\sqrt{5}}$ ce qui donne

$$I = \sqrt{5}\int_{-\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\frac{1}{\sqrt{5}}} \frac{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}v}{\frac{5}{4}(1-v^2)}\mathrm{d}v$$

soit

$$I = \frac{2\sqrt{5}}{5}\int_{-\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\frac{1}{\sqrt{5}}} \frac{1}{1-v^2}\mathrm{d}v + \int_{-\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\frac{1}{\sqrt{5}}} \frac{-2v}{1-v^2}\mathrm{d}v.$$

La deuxième intégrale est nulle car la fonction à intégrer est impaire. La première étant paire, il reste :

$$I = \frac{2\sqrt{5}}{5}\left[\ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right)\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}}.$$

Donc au total,

$$I = \frac{2\sqrt{5}}{5}\ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}\right).$$

---