Rappel : En MP, les colles des semaines du 12 décembre et du 03 janvier sont supprimées.

Passage à la limite sous une intégrale

- Révision du programme précédent concernant l'intégration sur un intervalle quelconque.
- Convergence en moyenne : Si I est borné et les $f_n \in L^1(I)$ telles que f_n CVU vers f sur I, alors f est intégrable sur I et $\displaystyle\int_I f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_I f$.
- Théorème de convergence dominée et généralisation au théorème de convergence dominée étendu.

Commutation série intégrale

- **Cas I borné** lorsque les f_n sont intégrables sur I et $\sum f_n$ converge uniformément sur I.

- Pour I quelconque, **cas d'une suite de fonctions réelles positives** : Si les f_n sont continues par morceaux et intégrables sur I et si $\sum f_n$ converge simplement sur I vers f continue par morceaux, alors f est intégrable sur I ssi la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_I f_n$ est convergente et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_I f_n\right) = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)$.

- **Cas d'une suite de fonctions réelles ou complexes** : Si les f_n sont continues par morceaux et intégrables sur I, si $\sum f_n$ converge simplement sur I vers f continue par morceaux et si la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_I |f_n|$ est convergente, alors $f \in L^1(I)$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_I f_n\right) = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)$.

Intégrales à paramètre(s)

- Continuité sous le signe intégrale avec hypothèse de domination globale ou locale.
- Dérivation sous le signe intégrale : cas $\mathscr{C}^1$,$\mathscr{C}^k$.
- Etude de la fonction $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$: domaine de définition, formule $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, régularité.

À connaître

- Tous les énoncés des théorèmes devront être connus en sachant mettre en évidence les hypothèses "cruciales".
- Théorème de commutation limite/intégrale puis série/intégrale dans le cas où I est borné.
- Toute l'étude de Γ : domaine de définition, $\Gamma \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^{*+})$, relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et $\Gamma(n+1) = n!$.

- CCINP 25, 27, 30.

---

programme suivant : *Topologie des evn.*