Topologie des evn

- Voisinage d'un point, propriété de Hausdorff.
- Ouvert : définition, intersection et union d'ouverts, toute boule ouverte est un ouvert.
- Fermés : définition comme complémentaire d'ouvert, intersection et union de fermés, toute boule fermée est un fermé, toute partie finie est un fermé, si $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$ alors $\{u_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ est un fermé de E.
- Points adhérents à une partie A ; $\overline{A}$ est le plus petit fermé de E contenant A, A est fermé **ssi** $A = \overline{A}$, caractérisation séquentielle des fermés.
- Densité : A dense dans E **ssi** $\overline{A} = E$. Cas particulier de $\mathbb{R}$: A est dense dans $\mathbb{R}$ ssi pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ / $x < y$, il existe $a \in A$ tel que $x < a < y$, densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.
- Points intérieurs à une partie A ; $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert de E contenu dans A, A est ouvert **ssi** $\overset{\circ}{A} = A$, A est d'intérieur vide ssi le complémentaire de A est dense dans E. Exemples.
- Frontière, points isolés.
- Étude des ouverts et des fermés de $E_1 \times E_2$.
- Topologie induite sur une partie : voisinage relatif à A, boule relative à A, ouvert de A ($\forall x \in \Omega, \exists r > 0$ / $B_A(x, r) \subset \Omega$) et caractérisation : Ω est un ouvert de A ssi il existe un ouvert Ω' de E tel que $\Omega = A \cap \Omega'$.
Définition d'un fermé de A ($A \setminus F$ ouvert de A) et caractérisation : F ouvert de A ssi il existe un fermé F' de E tel que $F = A \cap F'$.

Topologie et continuité

- Limite de $f : A \subset E \to F$ en $a \in \overline{A}$. Extension à la limite lorsque $\|x\| \to +\infty$.
- Opérations sur les limites : somme, produit externe, composition. Caractérisation séquentielle.
- Continuité en un point, opérations.
- Continuité sur une partie et caractérisation par image réciproque d'ouverts, de fermés.
- Continuité de l'application déterminant, $GL_n(\mathbb{K})$ ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
- Si A dense dans B, et f, g continues sur B telles que $f_{|A} = g_{|A}$ alors $f = g$ sur B.
- Homéomorphismes. Ce sont des applications ouvertes et fermées.
- Continuité uniforme : caractérisation séquentielle. Stabilité par somme et produit externe. Cas particulier des applications lipschitziennes.
- Continuité des applications linéaires. Une application linéaire est continue ssi il existe $k \geqslant 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\|_F \leqslant k\|x\|_E$ ssi f est bornée sur une boule.
- Définition de la norme subordonnée pour les applications linéaires continues avec les différentes expressions :
$|||f||| = \underset{x\in E\setminus\{0_E\}}{\mathrm{Sup}} \dfrac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \underset{\|x\|_E\leqslant 1}{\mathrm{Sup}} \|f(x)\|_F = \underset{\|x\|=1}{\mathrm{Sup}} \|f(x)\|_F = \mathrm{Inf}\{k \in \mathbb{R}^+ \,/\, \forall x \in E,\ \|f(x)\|_F \leqslant k\|x\|_E\}$.
- Si E est de dimension finie, toute application linéaire $f : E \to F$ est continue. Extension aux applications bilinéaires et p-linéaires.

À connaître

- Toute boule ouverte (resp. fermée) est un ouvert (resp. un fermé).
- L'image réciproque d'un ouvert de F par une application continue $f : A \subset E \to F$ est un ouvert de A.
- Caractérisation des applications linéaires continues (f est continue ssi $\|f(x)\|_F \leqslant k\|x\|_E$ ssi f est bornée sur une boule).
- Toute application linéaire dont la source est de dimension finie est continue.
- Caractérisation séquentielle de l'uniforme continuité.
- Continuité de det : $M \mapsto \det(M)$.
- $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

- CCINP 34, 37, 44

---

programme suivant : *Connexité par arcs, compacité.*