Connexité par arcs

- Définition de la connexité par arcs, exemples avec une sphère, une boule. Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles. Image continue d'une partie connexe par arcs.
- $GL_n(\mathbb{R})$ non connexe par arcs, $GL_n(\mathbb{C})$ connexe par arcs.

Compacité

- Définition séquentielle. Tout compact est fermé et borné. Réunion finie de compacts. Toute partie fermée dans un compact est compacte. Produit fini de compacts.
- Si (u_n) est une suite d'un compact K, alors (u_n) converge si et seulement si (u_n) admet une unique valeur d'adhérence.
- Image continue d'un compact. Toute application continue d'un compact à valeurs dans $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes, elle est aussi uniformément continue (théorème de Heine).
- Toutes les normes sont équivalentes en dimension finie (démo non exigible).
- Les compacts d'un evndf sont exactement les parties fermées bornées. Si E est de dimension finie, la continuité sur A équivaut à la continuité sur tout compact de A.
- Si E est un espace vectoriel de dimension finie, toute suite bornée est convergente si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.

Fonctions vectorielles

- Révision de MPSI : théorème de Rolle, théorème des accroissements finis, caractérisation de la monotonie (stricte) pour une fonction dérivable sur I, théorème limite de la dérivée, CN d'extremum local, théorème de Darboux.
- Dérivation des fonctions vectorielles (à valeurs dans un ev dimension finie) : définition, fonction dérivée. Propriétés de la dérivation : linéarité, dérivabilité de $u(f) : x \mapsto u(f(x))$ avec $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $f : I \to E$ dérivable sur I et de $B(f,g)$ où $B : E_1 \times E_2 \to F$ bilinéaire, $f : I \to E_1$ et $g : I \to E_2$ dérivables sur I . Généralisation à la n-linéarité.
Dérivabilité de $\rho.f$ où $\rho : I \to \mathbb{K}$ et $f : I \to E$ dérivables sur I.
Dérivabilité d'une composée.
- Dérivées successives : Définition d'une fonction p fois dérivables. Lien avec les composantes. Formule de Leibniz. Dérivées n-ième des fonctions usuelles (inverse, cos/sin, exponentielle). Fonctions de classe $\mathscr{C}^p$, structure d'algèbre.
- Intégrale d'une fonction vectorielle continue par morceaux sur un segment obtenus par intégration des composantes dans une base de E donnée (indépendance du choix de la base). Inégalité triangulaire, inégalité de Cauchy-Schwarz.
- Sommes de Riemann et théorème d'approximation pour les fonctions continues.
- Primitives de fonctions continues. $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f s'annulant en a, étude de $x \mapsto \displaystyle\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\mathrm{d}t$ avec f continue sur I et α, β deux fonctions dérivables sur $[a,b]$ à valeurs dans I.
- Intégration par parties, théorème de changement de variable. Application aux fonctions paires, impaires, périodiques.
- Inégalité des accroissements finis pour $f : [a,b] \to E$.
- Formules de Taylor avec reste intégrale, inégalité de Taylor-Lagrange, formule de Taylor-Young.
- Généralisation des théorèmes d'analyse sur les suites et séries de fonctions scalaires aux fonctions vectorielles.

À connaître

- $O(n)$ est un compact de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
- Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.
- Tout compact est fermé et borné.
- Si E est un espace vectoriel de dimension finie, toute suite bornée est convergente si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.
- Formule de Leibniz pour $B(f,g)$ avec B bilinéaire.
- Formule de Taylor avec reste intégrale pour $f \in \mathscr{C}^n(I,E)$.
- Formule de Taylor-Young pour $f \in \mathscr{C}^n(I,E)$.
- Somme de Riemann et théorème d'approximation. Cas où f est lipschitzienne.
- CCINP 45, 56, 58bis.

programme suivant : *Endomorphismes des espaces vectoriels euclidiens.*