Endomorphismes d'un espace vectoriel euclidien

- Adjoint d'un endomorphisme, définition. Matrice d'un adjoint en base orthonormale. Opérations sur les adjoints. Rang, trace et spectre de f^*.
- Si F est f-stable alors $F^\perp$ est f^*-stable. application à la recherche des sev stables pour une matrice d'ordre 3.
- Polynôme minimal et caractéristique de f^*. Relation $\operatorname{Ker} P(f) = (\operatorname{Im} P(f^*))^\perp$ avec $P \in \mathbb{R}[X]$.
- Isométrie vectorielle : diverses caractérisations (conservation norme, produit scalaire, $f \circ f^* = Id_E$, $f^* \circ f = Id_E$, image d'une bon, image de toute bon)
- Spectre d'une isométrie vectorielle, notation $O(E)$ et $SO(E)$: ce sont des sous-groupes de $GL(E)$.
- Matrices orthogonales : diverses définitions ($MM^\top = I_n, M^\top M = I_n$, matrice de passage d'une bon à une bon).
- Orientation d'un ev euclidien, base orthonormale directe et indirecte.
- Réduction d'une isométrie en dimension 2, et en dimension n : il existe une bon pour laquelle
Mat $(f) = \operatorname{Diag}[R_{\theta_1}, ..., R_{\theta_r}, I_p, -I_q]$ avec $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
Traduction matricielle, cas des rotations.
- Réduction d'une rotation en dimension 3. Identification des isométries en dimension 3 selon la dimension des invariants.

À connaître

- Isomorphisme $E \to E^*, x \mapsto \langle x\,,\,.\rangle$ et application à la définition de l'adjoint d'un endomorphisme.
- $\operatorname{Ker}(P(f)) = (\operatorname{Im}(P(f^*)))^\perp$ avec $P \in \mathbb{R}[X]$
- Diverses caractérisations des isométries vectorielles et des matrices orthogonales.
- Tout endomorphisme d'un espace vectoriel réel E admet une droite ou un plan stable et application à la réduction des isométries vectorielles en dimension n.
- Identification des isométries en dimension 3 à l'aide de l'espace des invariants.
- CCINP 63, 77, 78.

programme suivant : *Endomorphismes auto-adjoints, dénombrabilité, probabilités.*