ATTENTION : TENIR COMPTE DU NOUVEAU COLLOSCOPE (sur mp.lamartin.fr)

Endomorphismes d'un espace vectoriel euclidien

- Révision du programme précédent (adjoint, isométries vectorielles).
- Endomorphisme autoadjoint. Définition par $f^* = f$. En base orthonormale, si $A = Mat(f)$ alors f est autoadjoint ssi $A \in S_n(\mathbb{R})$.
- Un projecteur est autoadjoint ssi c'est un projecteur orthogonal. De même pour une symétrie.
- Si f estautoadjoint alors $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$. De plus si F est f-stable alors $F^\perp$ aussi et $f_{|F}$, $f_{|F^\perp}$ sont autoadjoints.
- Théorème spectral : les sev propres sont deux à deux orthogonaux et $\operatorname{Sp}(f) \subset \mathbb{R}$. De plus il existe une bon de vecteurs propres.

Traduction matricielle : toute matrice symétrique réelle est orthogonalement semblable à une matrice diagonale réelle.
- Si f est autoadjoint, $|||f||| = \rho(f)$.
- Endomorphismes autoadjoints positifs et définis positifs. Matrices symétriques positives et définies positives.
- Caractérisation par le spectre des endomorphismes autoadjoints (resp. matrices symétriques) positifs (resp. positives), définis positifs (resp. définies positives).

Dénombrabilité

- Définition d'un ensemble dénombrable et au plus dénombrable, exemple $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$.
- Toute partie de $\mathbb{N}$ est finie ou dénombrable et une partie est au plus dénombrable si et seulement si elle est finie ou dénombrable.
- Un produit cartésien d'ensembles finis ou dénombrables est fini ou dénombrable.
- Une union finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrable est finie ou dénombrable.
- I est dénombrable ssi I est une réunion sur $\mathbb{N}$ de parties finies formant une suite croissante (suite exhaustive).
- $\mathbb{Z}$ est dénombrable, $\mathbb{Q}$ est dénombrable, $\mathbb{R}$ est non dénombrable.

À connaître

- Les sev propres de $f \in S(E)$ sont deux à deux orthogonaux et $\operatorname{Sp}(f) \subset \mathbb{R}$.
- Si $f \in S(E)$ alors $|||f||| = \rho(f)$.
- Soit $A \in S_n(\mathbb{R}))$ Alors $A \in S_n^+(\mathbb{R})$(resp. $S_n^{++}(\mathbb{R})$) ssi $\operatorname{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$(resp.$\mathbb{R}^{*+}$).
- Un produit fini d'ensembles finis ou dénombrables est fini ou dénombrable.
- Une union finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable.
- I est dénombrable ssi I est une réunion sur $\mathbb{N}$ de parties finies formant une suite croissante (suite exhaustive).
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ sont dénombrables. $\mathbb{R}$ non dénombrable.
- banque CCinp n° 66, 68, 112.

programme suivant : *Probabilités.*