Probabilités

- Vocabulaire de base : expérience aléatoire, univers. Définition d'une tribu, propriétés.
- Système complet d'événements.
- Espaces probabilisables et probabilisés. Définition d'une probabilité et propriété de σ-additivité.
- Loi de probabilité discrète pour une famille sommable (p_ω) de réels positifs de somme 1.
- Propriétés des probabilités, propriété de σ-additivité, probabilité du complémentaire.
- Théorème de continuité croissante (pour une union d'événements formant une suite croissante) et de continuité décroissante (pour une intersection d'événements formant une suite décroissante)
- Inégalité de Boole.
- Probabilités conditionnelles, formule des probabilités totales, formule des probabilités composées, formule de Bayes.
- Indépendance (mutuelle) d'événements. Si (A_n) est une famille d'événements indépendants et $B_n \in \{A_n, \overline{A_n}\}$, alors (B_n) est une famille d'événements indépendants.

Variables aléatoires

Variable aléatoire, loi de probabilité d'une variable aléatoire.
- Couple de variables aléatoires, loi conjointe et loi marginale. Loi conditionnelle.
- Image d'une variable aléatoire. Si X et Y ont même loi alors $f(X)$ et $f(Y)$ aussi. Généralisation à l'image d'un p-uplet de variables aléatoires. Loi de la somme $X + Y$.
- Indépendances de variables aléatoires. Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$. Lemme des coalitions.
- Espérance d'une variable aléatoire : pour une variable réelle positive, $E(X) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} xP(X = x) \in [0, +\infty]$ et tout calcul donnant un résultat fini suffira pour justifier une espérance finie.
- Pour X à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $E(X) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$.
- Lois usuelles : Bernoulli, binomiale, géométrique, Poisson. Calcul de l'espérance.
- Pour une variable réelle ou complexe, X est d'espérance finie ssi la famille $(xP(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable.
- Théorème de transfert pour 1 ou plusieurs variables, linéarité de l'espérance et théorème de majoration.
- Espérance d'un produit de variables aléatoires iid.

NB : Pas de variance, covariance et inégalités cette semaine.

À connaître

- Loi de probabilité discrète : existence et unicité.
- Théorème de continuité croissante.
- Inégalité de Boole.
- Si $A_1, ..., A_n$ indépendants alors $B_1, ..., B_n$ aussi avec $B_i \in \{A_i, \overline{A_i}\}$.
- Si X et Y ont même loi alors $f(X)$ et $f(Y)$ aussi
- Théorème de transfert pour une variable.
- Pour X à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $E(X) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$.
- CCINP 97, 103, 106

---

programme suivant : *Probabilités (variance, covariance, inégalités classiques et théorèmes d'approximation).*