Équations différentielles linéaires

- Révisions sur les EDL scalaire d'ordre 1 (avec raccord), ou d'ordre 2 à coefficients constants avec second membre exponentielle/polynôme.
- Cas des EDL d'ordre 2, recherche de solutions polynomiales, DSE et méthode de Lagrange.
- Définitions d'une EDL vectorielle $x' = a(t).x + b(t)$ avec $a : I \to \mathscr{L}(E)$ et $b : I \to E$ continues. Traduction matricielle $X' = A(t)X + B(t)$ et interprétation en tant que système d'équations différentielles linéaires scalaires.
- Cas d'une équation $y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$. Traduction matricielle.
- Toute solution est de classe $\mathscr{C}^1$. Écriture intégrale des solutions.
- Unicité des solutions avec même condition initiale.
- Thm de Cauchy d'existence et d'unicité avec condition initiale (existence admise).
- Système fondamental de solutions pour une EDLH. L'application $\varphi_{t_0} : \begin{array}{ccc} S_H & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & X(t_0) \end{array}$ est un isomorphisme d'ev. Structure et dimension de S_H. $(X_1, ..., X_n)$ est une base de S_H ssi pour tout $t \in I$, $(X_1(t), ..., X_n(t))$ est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ ssi il existe $t_0 \in I$, $(X_1(t_0), ..., X_n(t_0))$ est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
- Traduction de cette propriété pour une EDL scalaire d'ordre n de la forme
$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$.
- Si $(X_1, ..., X_n)$ est un SFS de (H) alors toute fonction $Z \in \mathscr{C}^1(I, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$ s'écrit de manière unique $Z = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i.X_i$ avec chaque $\alpha_i \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$. Application à la méthode de variation des constantes.
- Méthode de variation des constantes pour les équations scalaires d'ordre n et cas particulier de l'ordre 2.
- Cas des systèmes différentiels à coefficients constants $X'(t) = A.X(t)$: Les solutions sont $t \mapsto e^{tA}.X_0$. Cas où A est diagonalisable où un SFS est donné par les $t \mapsto e^{\lambda_i t}V_i$.

Exercices et démos à connaître :

- Ecriture comme une EDL d'ordre 1 matricielle d'une EDL scalaire d'ordre n.
- Dérivabilité de $t \mapsto e^{tA}$ avec $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et résolution de $X'(t) = A.X(t)$ où A est une matrice constante.
- Preuve de l'unicité des solutions de l'équation $X' = A(t)X + B(t)$ avec $X(t_0) = X_0$.
- Recherche d'un système fondamental des solutions pour une équation $X'(t) = AX(t)$ avec $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable.
- CCINP 31, 32, 74.

---

programme suivant : *Fonctions à plusieurs variables.*