Calcul différentiel (1ère partie)

- Limite et continuité en un point pour une fonction à plusieurs variables.
- Applications partielles, dérivées partielles, notations $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ou $D_i f(a)$, fonction de classe $\mathscr{C}^1$.
- Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.
- Développement limité d'ordre 1 pour une fonction de p variables admettant des DP : $f(a+h) = f(a) + \displaystyle\sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + o(\|h\|)$ (démo pour $p=2$)
- Calcul de la dérivée de $t \mapsto F(u_1(t), ..., u_p(t))$ lorsque F et les u_i sont de classe $\mathscr{C}^1$ (règle de la chaîne pour une seule variable).
- Généralisation à la recherche des DP de $(u,v) \mapsto f(x(u,v), y(u,v))$ (f, x et y de classe $\mathscr{C}^1$).
- Application à la recherche du gradient en coordonnées polaires.
- Dérivées partielles d'ordre supérieur, théorème de Schwarz. Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$.
- Exemples de résolutions d'EDP : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g(x,y)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0$.
- Différentiabilité d'une fonction en un point, relation $f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a).h + o(\|h\|)$. Unicité de l'application linéaire tangente.

Notations $\mathrm{d}f$, $\mathrm{d}f(a)$, $\mathrm{d}f(a).h$. Application à la différentiabilité de $A \mapsto A^3$, de f si f est linéaire, de B si B bilinéaire.
- Lien entre la différentiabilité et la dérivabilité pour les fonctions d'une seule variable.
- Dérivée d'une fonction en un point selon un vecteur. Si f est différentiable en a, alors f admet une dérivée selon tout vecteur v et $D_v f(a) = \mathrm{d}f(a).v$. Réciproque fausse.
- Opérations sur les fonctions différentiables : différentielle d'une somme, d'un produit $\rho.f$ où ρ est une fonction réelle, d'une composée $f \circ g$: Dérivée de la composée $f \circ \rho$ où ρ est une fonction d'une seule variable réelle. Cas particulier de la dérivabilité de $t \mapsto f(a+th)$.

Exercices et démos à connaître :

- Formule de Taylor à l'ordre 1 (pour deux variables).
- Dérivabilité et valeur de la dérivée pour $t \mapsto f(x_1(t), ..., x_p(t))$ avec f et les x_i de classe $\mathscr{C}^1$ (démo pour $p=2$).
- Exemples de résolutions d'EDP : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g(x,y)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0$.
- Unicité de la différentielle $\mathrm{d}f(a)$ lorsque f est différentiable en a
- Différentiabilité de $g \circ f$ lorsque f différentiable en a, et g en $f(a)$.
- Si f est différentiable en a, alors f admet une dérivée selon tout vecteur v et $D_v f(a) = \mathrm{d}f(a).v$
- Dérivées partielles de $(r,\theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ en fonction de celles de f (f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$). Application au gradient en coordonnées polaires (ou cylindriques).
- CCINP 52, 57, 58

---

programme suivant : *Matrices jacobiennes, espace tangent, problèmes d'optimisation.*