Calcul différentiel (2ème partie)

Révision du programme précédent
- Matrices jacobiennes et application à la règle de la chaîne pour les dérivées partielles d'une composée. Application au calcul du gradient en coordonnées cylindriques, sphériques.
- Si f de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, $a, b \in U$ et $\gamma : [0,1] \to U$ de classe $\mathscr{C}^1$ tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$ alors $f(b) - f(a) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t)).\gamma'(t)\mathrm{d}t$
Application à la caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert connexe par arcs.
- Espace tangent à une partie d'un espace vectoriel de dimension finie. Définition, illustration avec l'espace tangent à un graphe de fonction numérique, à la sphère unité.
- Algèbre des fonctions numériques : vecteur gradient, $\nabla f(a)$ donne (si non nul) la dérivée directionnelle maximale en a.
- Détermination de l'espace tangent en $x \in X$ où $X = \{x \in \Omega \ / \ g(x) = 0\}$ (l'inclusion réciproque admise). Application aux surfaces d'équation $f(x, y, z) = 0$: notion de point régulier, espace tangent en M_0 et plan tangent en M_0, détermination explicite.
- Problèmes d'optimisation **sans contrainte** : CN d'extremum local.
- Optimisation **avec contrainte** : si $f_{|X}$ a un extremum local en $x \in X$ et f différentiable en x, alors $T_xX \subset (\mathbb{R}\nabla f(x))^{\perp}$. Cas particulier où $X = \{x \in \Omega \ / \ g(x) = 0\}$ et $\mathrm{d}g(x) \neq 0$: dans ce cas, $\nabla f(x)$ et $\nabla g(x)$ sont colinéaires.
- Matrice hessienne, définition, formule de Taylor à l'ordre 2. Cas particulier de deux variables avec les notations de Monge. Condition suffisante d'extremum local en un point critique selon que $H_f(x) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ ou $H_{-f}(x) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Caractérisation pour deux variables avec déterminant et trace de la Hessienne en x.

Exercices et démos à connaître :

- Condition nécessaire d'extremum local sur un ouvert.
- Si $g : \Omega \subset E \to \mathbb{R}$ différentiable telle que $\nabla g(x) \neq 0$ alors l'espace tangent en $x \in X$ où $X = \{x \in \Omega \ / \ g(x) = 0\}$ est inclus dans $(\mathbb{R}\nabla g(x))^{\perp}$.
- Formule de Taylor à l'ordre 2.
- CCINP n° 56

Ce programme clôture les colles de mathématiques en MP.