

Programme de Mathématiques MP/MPI

Structures algébriques usuelles

L'étude des structures algébriques offre l'occasion d'approfondir plusieurs points abordés en première année : arithmétique de \mathbb{Z} et de $\mathbb{K}[X]$, congruences, algèbre linéaire, groupe symétrique, groupes issus de l'algèbre linéaire, ou, ultérieurement, de la géométrie des espaces euclidiens.

Le paragraphe relatif aux polynômes permet de revenir sur l'étude menée en première année, dans un cadre étendu et dans un esprit plus algébrique mettant l'accent sur la notion d'idéal.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Compléments sur les groupes

Intersection de sous-groupes.

Sous-groupe engendré par une partie. Partie génératrice d'un groupe.

Sous-groupes du groupe $(\mathbb{Z}, +)$.

Groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$. Générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Groupe monogène, groupe cyclique.

Groupe des racines n -ièmes de l'unité.

Tout groupe monogène infini est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$. Tout groupe monogène fini de cardinal n est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

Ordre d'un élément d'un groupe.

L'ordre de x est le cardinal du sous-groupe de G engendré par x .

Si x est d'ordre fini d et si e désigne le neutre de G , alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $x^n = e \iff d|n$.

L'ordre d'un élément d'un groupe fini divise le cardinal du groupe.

La démonstration n'est exigible que pour G commutatif.

b) Compléments sur les anneaux

Produit fini d'anneaux.

Idéal d'un anneau commutatif.

Noyau d'un morphisme d'anneaux commutatifs.

Idéal engendré par un élément.

Notation xA .

Divisibilité dans un anneau commutatif intègre.

Interprétation en termes d'idéaux.

c) Idéaux de \mathbb{Z}

Idéaux de \mathbb{Z} .

Définition du PGCD de $n \geq 2$ entiers relatifs en termes d'idéaux, relation de Bézout.

Lien avec le programme de première année.

d) Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Condition nécessaire et suffisante pour que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ soit un corps.

Notation \mathbb{F}_p lorsque p est premier.

Théorème chinois : isomorphisme naturel de $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si $m \wedge n = 1$; extension à plus de deux facteurs.

Application aux systèmes de congruences et à la résolution de systèmes d'équations dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Indicatrice d'Euler φ . Calcul à l'aide de la décomposition en produits de facteurs premiers.

Relation $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ si m et n sont premiers entre eux; expression de $\varphi(p^k)$ pour p premier.

Théorème d'Euler.

Lien avec le petit théorème de Fermat.

e) Anneaux $\mathbb{K}[X]$

Dans ce paragraphe, \mathbb{K} est un sous-corps de \mathbb{C} .

Idéaux de $\mathbb{K}[X]$.

Définition du PGCD de $n \geq 2$ polynômes en termes d'idéaux, relation de Bézout.

Par convention, le PGCD est unitaire.

Irréductibles de $\mathbb{K}[X]$. Existence et unicité de la décomposition en facteurs irréductibles unitaires.

Irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.

La démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss est hors programme.

L'étude des irréductibles de $\mathbb{K}[X]$ pour un corps autre que \mathbb{R} ou \mathbb{C} n'est pas un objectif du programme.**f) Algèbres**

Algèbre.

Les algèbres sont unitaires.

Exemples : $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{L}(E)$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$.

Sous-algèbre.

Morphisme d'algèbres.

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

La réduction des endomorphismes et des matrices carrées prolonge les notions d'algèbre linéaire vues en première année. Elle trouve des applications et des illustrations dans d'autres domaines du programme (topologie, équations différentielles, systèmes dynamiques discrets, chaînes de Markov). Elle permet également de tisser des liens entre l'algèbre linéaire et l'algèbre générale, notamment polynomiale.

Le but de cette section est de donner une introduction substantielle au problème de la réduction. Les approches sont de deux types, qu'il convient d'identifier : la première, de nature géométrique, repose sur les notions de sous-espace stable et d'éléments propres ; la seconde, plus algébrique, fait appel aux polynômes annulateurs.

Sans soulever de difficulté, on signale que les notions d'algèbre linéaire étudiées en première année s'étendent au cas d'un corps de base quelconque. Pour éviter les difficultés liées aux polynômes en caractéristique non nulle, la section est traitée sous l'hypothèse que \mathbb{K} est un sous-corps de \mathbb{C} .

a) Compléments d'algèbre linéaire

Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels.

Projecteurs associés à une décomposition de E en somme directe.Si F_1, \dots, F_p sont des sous-espaces de dimension finie,

Base adaptée à une décomposition en somme directe.

$$\dim\left(\sum_{i=1}^p F_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$$

avec égalité si et seulement si la somme est directe.

Si E_1, \dots, E_p sont des sous-espaces de E tels que $E = \bigoplus E_i$ et si $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$ pour tout i , alors il existe une et une seule $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $u|_{E_i} = u_i$ pour tout i .

Matrices définies par blocs.

Interprétation géométrique des blocs.

Opérations par blocs de tailles compatibles (combinaison linéaire, produit, transposition).

La démonstration concernant le produit par blocs n'est pas exigible.

Transvections par blocs. Invariance du déterminant.

Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.

b) Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

Sous-espace stable par un endomorphisme. Endomorphisme induit.

En dimension finie, traduction matricielle.

Droite stable par un endomorphisme. Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre.

Équation aux éléments propres $u(x) = \lambda x$.

Spectre d'un endomorphisme en dimension finie.

La notion de valeur spectrale est hors programme.

La somme d'une famille finie de sous-espaces propres d'un endomorphisme est directe.

Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie n est fini, et de cardinal au plus n .

Si deux endomorphismes u et v commutent, tout sous-espace propre de u est stable par v .
Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre et spectre d'une matrice carrée.

Le noyau et l'image de u sont stables par v .

Équation aux éléments propres $MX = \lambda X$.
Deux matrices semblables ont même spectre.
Si \mathbb{K} est un sous-corps de \mathbb{K}' et si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le spectre de M dans \mathbb{K} est contenu dans le spectre de M dans \mathbb{K}' .

c) Polynôme caractéristique

Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

Par convention le polynôme caractéristique est unitaire. Notations χ_A, χ_u . Coefficients du polynôme caractéristique de degrés 0 et $n - 1$.

Les valeurs propres d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie sont les racines de son polynôme caractéristique.

Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire.

Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit.

Multiplicité d'une valeur propre.

La dimension du sous-espace propre associé à λ est majorée par la multiplicité de λ .

d) Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables

Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale.

Une telle base est constituée de vecteurs propres. Cas des projecteurs, des symétries.

Pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, il faut et il suffit que la somme de ses sous-espaces propres soit égale à E .

Caractérisation par la somme des dimensions des sous-espaces propres.

Une matrice carrée est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Interprétation en termes d'endomorphisme.

Cas d'un endomorphisme d'un espace de dimension n admettant n valeurs propres distinctes.

Dans les exercices pratiques, on se limite à $n = 2$ ou $n = 3$. Traduction matricielle.

Pour qu'un endomorphisme u soit diagonalisable, il faut et il suffit que χ_u soit scindé et que, pour toute valeur propre de u , la dimension de l'espace propre associé soit égale à sa multiplicité.

Traduction matricielle.

Cas où χ_u est scindé à racines simples.

e) Endomorphismes et matrices carrées trigonalisables

Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est triangulaire.

Interprétation géométrique.

Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire.

Interprétation en termes d'endomorphisme.

Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

La pratique de la trigonalisation n'est pas un objectif du programme.

Traduction matricielle.

Expression à l'aide des valeurs propres de la trace et du déterminant d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable.

f) Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes

Endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel E de dimension finie, matrice nilpotente.

Un endomorphisme est nilpotent si et seulement si il est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0.

L'indice de nilpotence est majoré par la dimension de E .

Caractérisation des endomorphismes nilpotents et des matrices nilpotentes par le polynôme caractéristique.

g) Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

Pour u dans $\mathcal{L}(E)$, morphisme d'algèbres $P \mapsto P(u)$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$. Le noyau de ce morphisme est l'idéal annulateur de u . Son image est la sous-algèbre commutative $\mathbb{K}[u]$ de $\mathcal{L}(E)$.

Traduction matricielle.

Polynôme minimal d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie, d'une matrice carrée.

Le polynôme minimal est unitaire.

Si d est le degré du polynôme minimal de u , alors la famille $(u^k)_{0 \leq k \leq d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.

Notations $\pi_u, \mu_u, \pi_M, \mu_M$.

Si P annule u , toute valeur propre de u est racine de P .

Si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.

Les racines de π_u dans \mathbb{K} sont les valeurs propres de u .

h) Lemme de décomposition des noyaux

Si P_1, \dots, P_r sont des éléments de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux de produit égal à P , alors :

$$\text{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker}(P_i(u)).$$

i) Polynômes annulateurs et réduction

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il annule un polynôme simplement scindé, ou encore si et seulement si son polynôme minimal est simplement scindé.

Traduction matricielle.

Polynôme minimal d'un endomorphisme induit. Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable.

Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement s'il annule un polynôme scindé, ou encore si et seulement si son polynôme minimal est scindé.

Traduction matricielle.

j) Théorème de Cayley-Hamilton et sous-espaces caractéristiques

Théorème de Cayley-Hamilton.

La démonstration n'est pas exigible.

Sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme à polynôme caractéristique scindé; E est somme directe des sous-espaces caractéristiques de u .

Dimension d'un sous-espace caractéristique.

Traduction matricielle de cette décomposition : similitude à une matrice diagonale par blocs, chaque bloc diagonal étant triangulaire et à termes diagonaux égaux.

Endomorphismes d'un espace euclidien

L'objectif de cette section est double :

- approfondir dans le cadre euclidien la thématique de la réduction des endomorphismes, à travers l'étude des endomorphismes autoadjoints et des isométries;
- introduire la notion d'endomorphisme symétrique positif, notamment en vue du calcul différentiel d'ordre 2.

La notion de produit scalaire hermitien est hors programme.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Adjoint d'un endomorphisme

Représentation des formes linéaires sur un espace euclidien.

Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien.

Notation u^* .

Linéarité de $u \mapsto u^*$, adjoint d'une composée, involutivité du passage à l'adjoint.

Matrice de l'adjoint en base orthonormée.

Si le sous-espace F est stable par u , alors F^\perp est stable par u^* .

b) Matrices orthogonales

Matrice orthogonale : définition par $A^\top A = I_n$, caractérisation par le caractère orthonormal de la famille des colonnes, des lignes.

Interprétation comme matrice de changement de base orthonormée. Matrices orthogonalement semblables.

Groupe orthogonal.

Notations $O_n(\mathbb{R})$, $O(n)$.

Matrice orthogonale positive ou directe, négative ou indirecte.

Notations $SO_n(\mathbb{R})$, $SO(n)$.

Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie.

Pour E euclidien orienté et e et e' bases orthonormées directes de E , égalité des applications \det_e et $\det_{e'}$.

c) Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Isométrie vectorielle : définition par la conservation des normes.

Par définition, une isométrie vectorielle est linéaire. On mentionne la terminologie « automorphisme orthogonal » tout en lui préférant « isométrie vectorielle ».

Exemples : symétrie orthogonale, réflexion.

Caractérisations des isométries de E parmi les endomorphismes de E : par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormée, par la relation $u^* = u^{-1}$.

Groupe orthogonal.

Notation $O(E)$.

Déterminant d'une isométrie. Isométrie directe, indirecte.

Groupe spécial orthogonal.

Notation $SO(E)$.

d) Isométries vectorielles en dimension 2

Description des matrices orthogonales directes et indirectes de taille 2.

Rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté.

On introduit à cette occasion, sans soulever de difficulté sur la notion d'angle, la notion de mesure d'un angle orienté de vecteurs.

Morphisme $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$ de \mathbb{R} dans $SO_2(\mathbb{R})$; surjectivité et noyau.

Isomorphisme de \mathbb{U} sur $SO_2(\mathbb{R})$. Le groupe $SO_2(\mathbb{R})$ est commutatif.

Classification des isométries d'un plan euclidien.

e) Réduction des isométries

Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.

Réduction d'une isométrie en base orthonormée.

Interprétation matricielle.

Cas particulier : réduction d'une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3.

La forme réduite justifie la terminologie « rotation ». La pratique du calcul des éléments géométriques d'un élément de $SO_3(\mathbb{R})$ n'est pas un attendu du programme.

f) Endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien

Endomorphisme autoadjoint : définition par $u^* = u$.
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.
Caractérisation du caractère autoadjoint par la matrice en base orthonormée.

On mentionne la terminologie « endomorphisme symétrique », tout en lui préférant « endomorphisme autoadjoint ». Notation $\mathcal{S}(E)$.

Les projecteurs orthogonaux sont les projecteurs autoadjoints.

Théorème spectral : si u est un endomorphisme d'un espace euclidien E , alors u est autoadjoint si et seulement si E est somme orthogonale des sous-espaces propres de u ou, de manière équivalente, s'il existe une base ortho-normée diagonalisant u .

Interprétation matricielle : une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ appartient à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si elle est orthogonalement diagonalisable.

g) Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs

Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif.
Matrice symétrique positive, définie positive.

Caractérisation spectrale. Notations $\mathcal{S}^+(E), \mathcal{S}^{++}(E)$.
Caractérisation spectrale. Notations $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Topologie des espaces vectoriels normés

Les objectifs de cette section sont les suivants :

- introduire, dans le cadre des espaces vectoriels normés, le vocabulaire de la topologie;
- donner, à travers l'étude des espaces vectoriels normés de dimension finie, un cadre commode pour traiter diverses applications à l'analyse (fonctions vectorielles, équations différentielles linéaires);
- introduire la notion de partie compacte dans un espace vectoriel normé, en soulignant le rôle qu'elle joue dans les résultats d'existence, notamment en matière d'optimisation;
- introduire la notion de composante connexe par arcs d'un espace vectoriel normé, qui permet de généraliser le théorème des valeurs intermédiaires et intervient en calcul différentiel;
- dégager l'idée fondamentale d'inégalité linéaire, qui apparaît lors de l'étude de la comparaison des normes et de la continuité des applications linéaires, et qui est quantifiée par la notion de norme d'opérateur.

Les notions seront illustrées par des exemples variés. On pourra ainsi travailler dans les espaces \mathbb{K}^n , les espaces de polynômes, d'applications linéaires ou de matrices, ainsi que dans divers espaces fonctionnels.

Il convient de souligner le contenu géométrique des notions abordées, notamment à l'aide de nombreuses figures. Lors de l'étude de la connexité par arcs, un dessin pertinent peut valoir preuve.

Les notions d'espace métrique et, a fortiori, d'espace topologique, sont hors programme. Il en est de même des notions de suite de Cauchy et d'espace de Banach.

Dans toute cette section, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

a) Normes et espaces vectoriels normés

Norme sur un \mathbb{K} -espace vectoriel. Structure d'espace vectoriel normé.

Vecteurs unitaires.

Distance associée à une norme.

Inégalité triangulaire.

Boules fermées, boules ouvertes, sphères. Convexité des boules.

On introduit à cette occasion la notion de partie convexe d'un espace vectoriel réel.

Parties, suites, fonctions bornées.

Norme associée à un produit scalaire sur un espace pré-hilbertien réel.

Normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ sur \mathbb{K}^n .

Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans \mathbb{K} .

Notation $\|\cdot\|_\infty$.

Pour les applications pratiques, on peut utiliser sans justification l'égalité $\sup(kA) = k \sup(A)$ pour A partie non vide de \mathbb{R} et $k \in \mathbb{R}^+$.

Notations $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$.

Normes de la convergence en moyenne et de la convergence en moyenne quadratique sur l'espace des fonctions continues sur un segment à valeurs réelles ou complexes. Produit fini d'espaces vectoriels normés.

b) Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

Suite convergente, divergente. Unicité de la limite. Caractère borné d'une suite convergente. Opérations algébriques sur les suites convergentes. Convergence d'une suite à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés.

Suites extraites, valeurs d'adhérence.

Une suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence diverge.

c) Comparaison des normes

Normes équivalentes. Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite.

Utilisation de suites pour établir que deux normes ne sont pas équivalentes.

d) Topologie d'un espace normé

Ouvert d'un espace normé. Stabilité de l'ensemble des ouverts par réunion quelconque, par intersection finie. Voisinage d'un point.

Fermé d'un espace normé. Stabilité de l'ensemble des fermés par intersection quelconque, par réunion finie.

Point intérieur, point adhérent.

Intérieur, adhérence, frontière d'une partie.

Caractérisation séquentielle des points adhérents, des fermés. Partie dense.

Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.

Si A est une partie d'un espace normé, ouvert et fermé relatifs de A . Voisinage relatif.

Une boule ouverte est un ouvert. Un produit (fini) d'ouverts est un ouvert.

Une boule fermée, une sphère, sont fermées. Un produit (fini) de fermés est fermé.

Par définition, une partie U de A est un ouvert relatif si U est voisinage relatif de chacun de ses points.

Caractérisation comme intersection avec A d'un ouvert de E .

Les fermés relatifs sont par définition les complémentaires dans A des ouverts relatifs. Caractérisation séquentielle. Caractérisation comme intersection avec A d'un fermé de E .

e) Étude locale d'une application, continuité

Limite en un point adhérent à une partie A .

Caractérisation séquentielle.

Extensions : limite de $f(x)$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$,

limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque A est une partie de \mathbb{R} , limite infinie en a adhérent à A pour une fonction réelle.

Cas d'une application à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés.

Opérations algébriques sur les limites. Limite d'une composée.

Continuité en un point. Caractérisation séquentielle.

Opérations algébriques sur les applications continues. Composition de deux applications continues.

Deux applications continues qui coïncident sur une partie dense sont égales.

Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.

Applications uniformément continues, applications lipschitziennes.

Caractère 1-lipschitzien de l'application $x \mapsto d(x, A)$ où A est une partie non vide de E .

f) Applications linéaires et multilinéaires continues

Critère de continuité d'une application linéaire entre deux espaces normés : $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est continue si et seulement s'il existe $C \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall x \in E, \|u(x)\| \leq C\|x\|.$$

Notation $\mathcal{L}_c(E, F)$.

Norme subordonnée (ou norme d'opérateur) d'une application linéaire continue.

Notations $\|u\|$, $\|u\|_{\text{op}}$. La norme d'opérateur est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$. Sous-multiplicativité de la norme d'opérateur.

Critère de continuité des applications multilinéaires.

Adaptation aux matrices.

La démonstration n'est pas exigible.

g) Parties compactes d'un espace normé

Définition d'une partie compacte par la propriété de Bolzano-Weierstrass.

La propriété de Borel-Lebesgue est hors programme.

Une partie compacte est fermée et bornée.

Un fermé relatif d'une partie compacte est compact.

Une suite d'éléments d'une partie compacte converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

Produit d'une famille finie de compacts.

h) Applications continues sur une partie compacte

Image continue d'une partie compacte.

Théorème de Heine.

Théorème des bornes atteintes pour une application numérique définie et continue sur un compact non vide.

On souligne l'importance de la compacité dans les problèmes d'optimisation, notamment en mettant en évidence des situations où l'on prouve l'existence d'un extremum à l'aide d'une restriction à un compact.

i) Connexité par arcs

Dans un espace vectoriel normé, chemin (ou arc) joignant deux points; partie connexe par arcs.

Relation d'équivalence associée sur une partie A de E . Les classes sont les composantes connexes par arcs.

Cas des parties convexes, des parties étoilées.

Les parties connexes par arcs de \mathbb{R} sont les intervalles.

Image continue d'une partie connexe par arcs.

Cas particulier des applications à valeurs réelles : théorème des valeurs intermédiaires.

j) Espaces vectoriels normés de dimension finie

Équivalence des normes en dimension finie.

La démonstration n'est pas exigible.

Invariance des différentes notions topologiques par rapport au choix d'une norme en dimension finie. Topologie naturelle d'un espace normé de dimension finie.

La convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.

Une partie d'un espace normé de dimension finie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

Une suite bornée d'un espace normé de dimension finie converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.

Un sous-espace de dimension finie d'un espace normé est fermé.

Si E est de dimension finie, $\mathcal{L}(E, F) = \mathcal{L}_c(E, F)$.

Continuité des applications polynomiales définies sur un espace normé de dimension finie, des applications multilinéaires définies sur un produit d'espaces vectoriels normés de dimensions finies.

Exemples : déterminant, produit matriciel, composition d'applications linéaires.

Séries numériques et vectorielles

L'objectif de cette section est double :

- consolider les acquis de première année relatifs aux séries numériques, en particulier à travers l'étude de questions de calcul asymptotique;
- étendre la notion de série convergente au cadre des espaces vectoriels normés de dimension finie.

Les séries sont avant tout un outil. L'étude des séries semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.

a) Séries à valeurs dans un espace normé de dimension finie

Sommes partielles. Convergence, divergence.

La série de terme général u_n est notée $\sum u_n$.

Somme et restes d'une série convergente.

En cas de convergence, notation $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Linéarité de la somme.

Le terme général d'une série convergente tend vers 0.

Divergence grossière.

Lien suite-série, séries télescopiques.

Série absolument convergente.

Une série absolument convergente d'éléments d'un espace vectoriel normé de dimension finie est convergente.

Le critère de Cauchy est hors programme.

b) Compléments sur les séries numériques

Technique de comparaison série-intégrale.

Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour établir des convergences et des divergences de séries, estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes, notamment dans le cas d'une fonction monotone.

Règle de d'Alembert.

Sommation des relations de comparaison : domination, négligeabilité, équivalence, dans les cas convergent et divergent.

La suite de référence est de signe constant à partir d'un certain rang. Cas particulier : théorème de Cesàro (pour une limite finie ou infinie).

Suites et séries de fonctions, séries entières

A - Suites et séries de fonctions

Les objectifs de cette section sont les suivants :

- définir différents modes usuels de convergence des suites et séries de fonctions;
- étudier la stabilité des propriétés des fonctions par passage à la limite;
- introduire la thématique de l'approximation, reliée à la notion topologique de densité, à travers deux théorèmes d'approximation uniforme susceptibles de nombreuses applications.

La technique n'est pas un but en soi. On privilégie les exemples significatifs : construction de fonctions solutions de problèmes (équations fonctionnelles ou différentielles, par exemple), mise en évidence de fonctions aux propriétés remarquables...

En vue des applications aux équations différentielles linéaires, les fonctions considérées sont à valeurs dans un espace normé de dimension finie. Dans la pratique, on se limite pour l'essentiel au cas de fonctions à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} . On peut commencer par traiter le programme dans ce cadre et expliquer brièvement l'extension au cas général.

Les fonctions sont définies sur une partie A d'un espace vectoriel E de dimension finie et à valeurs dans un espace vectoriel normé F de dimension finie.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Convergence simple, convergence uniforme

Convergence simple d'une suite de fonctions. Convergence uniforme. La convergence uniforme entraîne la convergence simple.

Pour des fonctions bornées, interprétation en termes de norme.

b) Continuité, double limite

Si les u_n sont continues en a et si (u_n) converge uniformément vers u sur A , alors u est continue en a . En particulier, toute limite uniforme de fonctions continues sur A est continue sur A .

Théorème de la double limite : soit (u_n) une suite de fonctions de A dans F convergeant uniformément vers u sur A , et soit a un point adhérent à A ; si, pour tout n , u_n admet une limite ℓ_n en a , alors (ℓ_n) admet une limite ℓ et $u(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

Le théorème s'applique dans le cas où l'hypothèse de convergence uniforme est satisfaite de façon locale, en particulier sur tout segment. En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur des intervalles adaptés à la situation.

La démonstration est hors programme.
Adaptation, si $A \subset \mathbb{R}$, aux cas où $a = +\infty$ et $a = -\infty$.

c) Intégration d'une limite uniforme sur un segment

Soit (u_n) une suite de fonctions continues définies sur un intervalle I de \mathbb{R} et à valeurs dans F , a un point de I . On suppose que (u_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction u . Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$ soit

$$U_n(x) = \int_a^x u_n, \quad U(x) = \int_a^x u.$$

Alors (U_n) converge uniformément vers U sur tout segment de I .

En particulier, si (u_n) converge uniformément vers u sur le segment $[a, b]$, alors : $\int_a^b u_n \rightarrow \int_a^b u$.

d) Dérivation d'une suite de fonctions

Soit (u_n) une suite de fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans F . Si (u_n) converge simplement sur I vers une fonction u , et si (u'_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction v , alors (u_n) converge uniformément vers u sur tout segment de I , u est de classe \mathcal{C}^1 sur I et $u' = v$.

En pratique, on vérifie la convergence uniforme de (u'_n) sur des intervalles adaptés à la situation.

Extension aux suites de fonctions de classe \mathcal{C}^k , sous l'hypothèse de convergence simple de $(u_n^{(j)})$ pour $0 \leq j \leq k-1$ et de convergence uniforme sur tout segment de $(u_n^{(k)})$.

En pratique, on vérifie la convergence uniforme de $(u_n^{(k)})$ sur des intervalles adaptés à la situation.

e) Séries de fonctions

Convergence simple, convergence uniforme.

Une série de fonctions converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et si la suite de ses restes converge uniformément vers 0.

Adaptation des résultats des paragraphes précédents au cas des séries de fonctions.

Convergence normale d'une série de fonctions. La convergence normale implique la convergence uniforme.

La convergence normale implique la convergence absolue en tout point.

Exemples d'études de fonctions définies comme sommes de séries : régularité, étude asymptotique, utilisation de la comparaison série-intégrale.

f) Approximation uniforme

Approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier.

Théorème de Weierstrass : toute fonction continue sur un segment S et à valeurs dans \mathbb{K} est limite uniforme sur S de fonctions polynomiales à coefficients dans \mathbb{K} .

La démonstration n'est pas exigible.

B - Séries entières

Les objectifs de cette section sont les suivants :

- étudier la convergence d'une série entière et les propriétés de sa somme;
- introduire la notion de fonction développable en série entière;
- établir les développements en série entière des fonctions usuelles.

Les séries entières donnent un outil puissant pour aborder certains calculs : résolution d'équations différentielles linéaires, fonctions génératrices en probabilités... Elles permettent également de revenir sur la thématique de la régularité des fonctions, introduite en première année, et donnent l'occasion d'introduire la « variable complexe ».

Les coefficients des séries entières considérées sont réels ou complexes.

a) Généralités

Série entière de la variable réelle, de la variable complexe.

Lemme d'Abel : si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Rayon de convergence d'une série entière, défini comme borne supérieure dans $[0, +\infty[$, de l'ensemble des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée.

Disque ouvert de convergence.

Intervalle ouvert de convergence.

Si $a_n = O(b_n)$ et donc en particulier si $a_n = o(b_n)$, $R_a \geq R_b$.

Si $a_n \sim b_n$, $R_a = R_b$.

Application de la règle de d'Alembert pour les séries numériques au calcul du rayon.

Somme et produit de Cauchy de deux séries entières.

La série $\sum a_n z^n$ converge absolument si $|z| < R$, et elle diverge grossièrement si $|z| > R$.

Rayon de convergence de $\sum n^\alpha x^n$.

La limite du rapport $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ peut être utilisée directement.

b) Continuité de la somme d'une série entière de la variable complexe

Convergence normale d'une série entière sur tout disque fermé de centre 0 contenu dans le disque ouvert de convergence.

Continuité de la somme d'une série entière sur le disque ouvert de convergence.

c) Régularité de la somme d'une série entière de la variable réelle

Théorème d'Abel radial :

si $\sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$ et si

$$\sum a_n R^n \text{ converge, alors } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow{x \rightarrow R^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n.$$

La somme d'une série entière est de classe \mathcal{C}^∞ sur l'intervalle ouvert de convergence et ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme.

Expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positif à l'aide des dérivées en 0 de sa somme.

La démonstration est hors programme.

$$\text{Relation } R(\sum a_n x^n) = R(\sum n a_n x^n).$$

Si les fonctions $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ coïncident sur un intervalle $]0, \alpha]$ avec $\alpha > 0$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.

d) Fonctions développables en série entière, développements usuels

Fonction développable en série entière sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon R , sur l'intervalle $] -R, R[$.

Développement de $\exp(z)$ sur \mathbb{C} .

Développement de $\frac{1}{1-z}$ sur $\{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.

Développements usuels dans le domaine réel.

Dans le cas réel, lien avec la série de Taylor.

Les étudiants doivent connaître les développements en série entière des fonctions exponentielle, hyperboliques, circulaires, Arctan, $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto (1+x)^\alpha$.

Les étudiants doivent savoir développer une fonction en série entière à l'aide d'une équation différentielle linéaire.

Fonctions vectorielles

Cette section a deux objectifs :

- étendre rapidement le programme d'analyse réelle de première année au cadre des fonctions vectorielles;
- fournir des outils pour l'étude des équations différentielles linéaires et du calcul différentiel.

Les fonctions sont définies sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans un espace normé de dimension finie E .

a) Dérivabilité en un point

Dérivabilité en un point.

Définition par le taux d'accroissement, caractérisation par le développement limité à l'ordre 1.

Interprétation cinématique.

Traduction en termes de coordonnées dans une base.

Dérivabilité à droite et à gauche.

b) Opérations sur les fonctions dérivables

Combinaison linéaire de fonctions dérivables.

Dérivabilité et dérivée de $L(f)$, où L est linéaire.

Dérivabilité et dérivée de $B(f, g)$, où B est bilinéaire, de $M(f_1, \dots, f_p)$, où M est multilinéaire.

Cas du produit scalaire, du déterminant.

Dérivabilité et dérivée de $f \circ \varphi$ où φ est une fonction réelle de variable réelle et f une fonction vectorielle.
Applications de classe \mathcal{C}^k . Opérations sur les applications de classe \mathcal{C}^k .

c) Intégration sur un segment

Intégrale d'une fonction vectorielle continue par morceaux sur un segment de \mathbb{R} .

Linéarité de l'intégrale. Relation de Chasles.

Pour L linéaire, intégrale de $L(f)$.

Inégalité triangulaire $\left\| \int_a^b f \right\| \leq \int_a^b \|f\|$.

Sommes de Riemann associées à une subdivision régulière.

$$\text{Notations } \int_{[a,b]} f, \int_a^b f, \int_a^b f(t) dt.$$

d) Intégrale fonction de sa borne supérieure

Dérivation de $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ pour f continue.

Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe \mathcal{C}^1 .

e) Formules de Taylor

Formule de Taylor avec reste intégral.

Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n pour une fonction de classe \mathcal{C}^n .

Formule de Taylor-Young à l'ordre n pour une fonction de classe \mathcal{C}^n .

Intégration sur un intervalle quelconque

L'objectif de cette section est triple :

- définir, dans le cadre restreint des fonctions continues par morceaux, les notions d'intégrale convergente et d'intégrabilité sur un intervalle non compact;
- donner des outils efficaces de passage à la limite sous l'intégrale, en particulier le théorème de convergence dominée;
- compléter l'étude des séries de fonctions par celle des intégrales à paramètre.

La technique n'est pas un but en soi. On privilégie donc les exemples significatifs : transformées intégrales (Fourier, Laplace), intégrales eulériennes...

On évite tout excès de rigueur dans la rédaction. Ainsi, dans les calculs concrets mettant en jeu l'intégration par parties ou le changement de variable, on n'impose pas de rappeler les hypothèses de régularité des énoncés. De même, dans l'application des théorèmes de passage à la limite sous l'intégrale ou de régularité des intégrales à paramètre, on se limite à la vérification des hypothèses cruciales, sans insister sur la continuité par morceaux en la variable d'intégration.

Les fonctions sont à valeurs dans \mathbb{K} , corps des nombres réels ou des nombres complexes.

a) Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

Pour f continue par morceaux de $[a, +\infty[$ dans \mathbb{K} , l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ est dite convergente si la fonction $x \mapsto \int_a^x f$ a une limite finie en $+\infty$.

$$\text{Notations } \int_a^{+\infty} f, \int_a^{+\infty} f(t) dt.$$

Intégrale convergente en $+\infty$.

Dérivation de $x \mapsto \int_x^{+\infty} f$ si f est continue.

Si f est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ et à valeurs positives, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f$ est majorée.

Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a, +\infty[$ telles que $0 \leq f \leq g$, la convergence de $\int_a^{+\infty} g$ implique celle de $\int_a^{+\infty} f$.

Pour $a \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$.

Pour $a \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-at} dt$.

b) Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

Une fonction f est dite intégrable sur $[a, +\infty[$ si elle est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ et si $\int_a^{+\infty} |f|$ converge.

Si f est intégrable sur $[a, +\infty[$, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge.

Théorème de comparaison : pour f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, +\infty[$, à valeurs dans \mathbb{K} :

- si $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O(g(x))$, alors l'intégrabilité de g sur $[a, +\infty[$ implique celle de f ;
- si $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x)$, alors l'intégrabilité de g sur $[a, +\infty[$ équivaut à celle de f .

Écriture $\int_a^{+\infty} f = +\infty$ en cas de divergence.

On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur $[a, +\infty[$ » et « l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge absolument ».

Pour f de signe constant, $\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[a, +\infty[$.

Un calcul montrant que $\int_I |f| < +\infty$ vaut preuve d'intégrabilité.

Fonction intégrable en $+\infty$. L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.

Le résultat s'applique en particulier si $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(g(x))$.

c) Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

Intégrale généralisée d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert de \mathbb{R} .

Notations $\int_a^b f, \int_a^b f(t) dt$.

Intégrale convergente en b , en a .

Écriture $\int_a^b f = +\infty$ si f est à valeurs dans \mathbb{R}^+ et d'intégrale divergente.

Pour une fonction à valeurs dans \mathbb{R}^+ , un calcul aboutissant à un résultat fini vaut preuve de convergence.

Propriétés des intégrales généralisées : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.

Intégration par parties sur un intervalle quelconque :

$$\int_a^b f(t)g'(t) dt = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t) dt.$$

L'existence des limites du produit fg aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de fg' et de $f'g$ sont de même nature.

Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.

Adaptation au cas où φ est strictement décroissante.

On applique ce résultat sans justification dans des cas de changements de variable usuels.

Changement de variable : étant données une fonction f continue sur $]a, b[$ et une fonction $\varphi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$ bijective, strictement croissante et de classe \mathcal{C}^1 , les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u) du$ sont de même nature et égales en cas de convergence.

d) Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

Intégrale absolument convergente.

La convergence absolue implique la convergence.

Une fonction est dite intégrable sur l'intervalle I si elle y est continue par morceaux et si son intégrale sur I est absolument convergente.

On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur $[a, b[$ » et « l'intégrale $\int_a^b f$ converge absolument ».

Fonction intégrable en b , en a .

Pour f intégrable de I dans \mathbb{K} , notation $\int_I f$.

Espace $L^1(I, \mathbb{K})$ des fonctions intégrables de I dans \mathbb{K} .

Inégalité triangulaire.

Si f est continue et intégrable sur I , à valeurs dans \mathbb{R}^+ et si $\int_I f = 0$, alors f est identiquement nulle.

Adaptation du théorème de comparaison en une borne quelconque.

Si $\alpha \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale de Riemann $\int_a^b \frac{1}{|x-a|^\alpha} dx$.

La fonction f est intégrable en a (resp. b) si et seulement si $t \mapsto f(a+t)$ (resp. $t \mapsto f(b-t)$) est intégrable en 0.

e) Intégration des relations de comparaison

Intégration des relations de comparaison, pour les intégrales partielles ou les restes : domination, négligeabilité, équivalence.

La fonction de référence est réelle de signe constant.

f) Convergence dominée

Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t .

Théorème de convergence dominée : soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux de I dans \mathbb{K} convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux et telle qu'il existe une fonction φ positive intégrable sur I vérifiant $|f_n| \leq \varphi$ pour tout n . Alors :

La démonstration est hors programme.

$$\int_I f_n \longrightarrow \int_I f.$$

Extension au cas d'une famille à paramètre réel $(f_\lambda)_{\lambda \in J}$ où J est un intervalle de \mathbb{R} .

g) Intégration terme à terme

Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de positivité ou de sommabilité, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t .

Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I , à valeurs dans \mathbb{R}^+ , telle que la série $\sum f_n$ converge simplement et que sa somme soit continue par morceaux sur I , alors, dans $[0, +\infty[$,

La démonstration est hors programme.

En particulier, l'intégrabilité de $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur I équivaut à

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt < +\infty.$$

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt.$$

Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I , à valeurs dans \mathbb{K} , telle que la série $\sum f_n$ converge simplement et que sa somme soit continue par morceaux sur I et telle que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n(t)| dt < +\infty,$$

alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt.$$

La démonstration est hors programme. On met en évidence le parallélisme de cet énoncé et du précédent avec ceux issus de la théorie des familles sommables.

On présente des exemples sur lesquels cet énoncé ne s'applique pas, mais dans lesquels l'intégration terme à terme peut être justifiée par le théorème de convergence dominée pour les sommes partielles.

h) Régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre

Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de régularité par rapport à x et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t .

Soit A une partie d'un espace normé de dimension finie, I un intervalle de \mathbb{R} , f une fonction définie sur $A \times I$ à valeurs dans \mathbb{K} telle que :

- pour tout $t \in I$, $f(\cdot, t)$ est continue;
- pour tout $x \in A$, $f(x, \cdot)$ est continue par morceaux;
- il existe une fonction φ intégrable sur I telle que, pour tout x de A , $|f(x, \cdot)| \leq \varphi$.

En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A , ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Alors $x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est définie et continue sur A .

Soit I et A deux intervalles de \mathbb{R} , f une fonction définie sur $A \times I$ à valeurs dans \mathbb{K} telle que :

- pour tout $t \in I$, $f(\cdot, t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur A ;
- pour tout $x \in A$, $f(x, \cdot)$ est intégrable sur I ;
- pour tout $x \in A$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot)$ est continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ positive intégrable sur I telle que, pour tout x de A , $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot) \right| \leq \varphi$.

En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A , ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Alors $g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur A et vérifie :

$$\forall x \in A, \quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

Extension à la classe \mathcal{C}^k d'une intégrale à paramètre, sous hypothèse de domination de $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ et d'intégrabilité des $\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, \cdot)$ pour $0 \leq j \leq k - 1$.

Exemples d'études de fonctions définies comme intégrales à paramètre : régularité, étude asymptotique.

Variables aléatoires discrètes

Cette section généralise aux variables aléatoires discrètes l'étude menée en première année des variables aléatoires à valeurs dans un ensemble fini. Cette généralisation nécessite d'introduire des notions générales de théorie des probabilités, lesquelles font l'objet d'un exposé à minima. En particulier :

- la notion de tribu, introduite pour donner un cadre rigoureux, n'appelle aucun développement théorique ;
- la construction d'espaces probabilisés n'est pas un objectif du programme ;
- les diverses notions de convergence (presque sûre, en probabilité, en loi) sont hors programme.

La théorie des familles sommables permet une extension très naturelle des notions et résultats vus en première année. Cette extension est effectuée rapidement, de manière à libérer du temps pour les exemples et exercices. L'objectif de l'enseignement est en effet de renforcer la compréhension de l'aléatoire, en lien avec d'autres parties du programme. On pourra ainsi faire travailler les étudiants sur divers objets aléatoires (permutations, graphes, matrices...) les inégalités de concentration et des exemples de processus à temps discret (marches aléatoires, chaînes de Markov...).

La notion de variable à densité est hors programme.

La notion d'espérance conditionnelle est hors programme.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Ensembles dénombrables

Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec \mathbb{N} .

Un ensemble est fini ou dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec une partie de \mathbb{N} .

Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable. Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable.

L'ensemble \mathbb{R} n'est pas dénombrable.

Les parties infinies de \mathbb{N} sont dénombrables.

Un tel ensemble est dit au plus dénombrable.

Les démonstrations ne sont pas exigibles.

Les ensembles \mathbb{N}^p ($p \in \mathbb{N}^*$), \mathbb{Z} et \mathbb{Q} sont dénombrables. Le support d'une famille sommable de nombres complexes est dénombrable.

La démonstration n'est pas exigible.

b) Espaces probabilisés

Tribu sur un ensemble Ω . Espace probabilisable (Ω, \mathcal{A}) .

Événements.

Probabilité sur un espace probabilisable, σ -additivité.

Espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

Continuité croissante, continuité décroissante.

La manipulation de tribus n'est pas un objectif du programme.

Généralisation du vocabulaire relatif aux événements introduit en première année.

Application : pour une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements (non nécessairement monotone), limites quand n tend vers l'infini de

$$P\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) \quad \text{et} \quad P\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right).$$

Propriété de sous-additivité de P pour une réunion dénombrable d'événements.

Événements négligeables, événements presque sûrs. Une réunion (resp. intersection) finie ou dénombrable d'événements négligeables (resp. presque sûrs) est un événement négligeable (resp. presque sûr).

Systèmes quasi-complets d'événements.

Tout développement supplémentaire sur ces notions est hors programme.

c) Probabilités conditionnelles et indépendance

Extension des résultats vus en première année : probabilité conditionnelle, formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes.

Par définition, les événements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Famille d'événements indépendants.

Si A et B sont indépendants, A et \bar{B} le sont aussi.

Notations $P_B(A), P(A|B)$.

Lorsque $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B s'écrit $P(A|B) = P(A)$.

L'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance.

d) Espaces probabilisés discrets

Si Ω est un ensemble, une distribution de probabilités discrètes sur Ω est une famille d'éléments de \mathbb{R}^+ indexée par Ω et de somme 1.

Probabilité définie sur $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ associée à une distribution de probabilités discrètes sur Ω .

Support d'une distribution de probabilités discrète; le support est au plus dénombrable.

Si Ω est au plus dénombrable, on obtient ainsi toutes les probabilités sur $\mathcal{P}(\Omega)$.

e) Variables aléatoires discrètes

Une variable aléatoire discrète X définie sur l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) et à valeurs dans E est une application définie sur Ω , à valeurs dans l'ensemble E , telle que $X(\Omega)$ soit au plus dénombrable et que, pour tout $x \in X(\Omega)$, l'ensemble $X^{-1}(\{x\})$ appartienne à \mathcal{A} .

Loi P_X d'une variable aléatoire discrète X .

Dans ce qui suit, toutes les variables aléatoires sont supposées discrètes.

La probabilité P_X est déterminée par la distribution de probabilités discrète $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$.

Notation $X \sim Y$.

Variable aléatoire $f(X)$.

Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$.

Loi conditionnelle d'une variable aléatoire X sachant un événement A .

Couple de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales.

Détermination des lois marginales à partir de la loi conjointe.

Notations $(X = x)$, $(X \in A)$, $\{X = x\}$, $\{X \in A\}$.

Lorsque $E = \mathbb{R}$, la variable aléatoire X est dite réelle.

Notations $(X \leq x)$, $(X \geq x)$, $(X < x)$, $(X > x)$ (et analogues avec accolades) pour une variable aléatoire réelle X .

La loi de X peut au besoin être définie sur un ensemble contenant $X(\Omega)$.

La notation $X \sim Y$ ne suppose pas que X et Y sont définies sur le même espace probabilisé.

Un couple est une variable aléatoire à valeurs dans un produit.

Notation $P(X = x, Y = y)$.

Extension aux n -uplets de variables aléatoires.

f) Variables aléatoires indépendantes

Couple de variables aléatoires indépendantes, famille finie de variables aléatoires indépendantes.

Famille quelconque de variables aléatoires indépendantes.

Fonctions de variables aléatoires indépendantes : si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$

Lemme des coalitions :

si les variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont indépendantes, les variables aléatoires $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ le sont aussi.

Existence d'espaces probabilisés portant une suite de variables indépendantes de lois discrètes données.

Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si la distribution de probabilités de (X, Y) est le produit des distributions de probabilités de X et Y .
Extension aux n -uplets de variables aléatoires.

Extension au cas de plus de deux variables.

Extension au cas de plus de deux coalitions.

La démonstration est hors programme.

Suites i.i.d. Modélisation du jeu de pile ou face infini : suite i.i.d. de variables de Bernoulli.

g) Lois usuelles

Pour p dans $]0, 1[$, loi géométrique de paramètre p .

Variable géométrique de paramètre p .

Pour λ dans \mathbb{R}_+^* , loi de Poisson de paramètre λ .

Variable de Poisson de paramètre λ .

Notations $\mathcal{G}(p)$, $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Interprétation comme rang du premier succès dans le jeu de pile ou face infini.

Notations $\mathcal{P}(\lambda)$, $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Interprétation en termes d'événements rares.

h) Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, l'espérance de X est la somme, dans $[0, +\infty]$, de la famille $(x P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$.

Pour une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, égalité $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$.

Une variable aléatoire complexe X est dite d'espérance finie si la famille $(x P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable; dans ce cas, la somme de cette famille est l'espérance de X .

Espérance d'une variable géométrique, d'une variable de Poisson.

Formule de transfert : soit X une variable aléatoire discrète, f une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs complexes; alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $(f(x) P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable; si tel est le cas : $E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) P(X = x)$.

Linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire.

Si $|X| \leq Y$ et si $Y \in L^1$, alors $X \in L^1$.

Si X et Y sont dans L^1 et indépendantes, alors XY est dans L^1 et :

$$E(XY) = E(X) E(Y).$$

Notation $E(X)$.

Notation $E(X)$. Variables centrées.

La notation $X \in L^1$ signifie que X est d'espérance finie. On ne soulèvera aucune difficulté quant à la définition précise de L^1 .

Caractérisation des variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^+ d'espérance nulle.

Extension au cas de n variables aléatoires.

i) Variance d'une variable aléatoire réelle, écart type et covariance

Si $E(X^2) < +\infty$, X est d'espérance finie.

Inégalité de Cauchy-Schwarz : si X et Y sont dans L^2 , XY est dans L^1 et $E(XY)^2 \leq E(X^2) E(Y^2)$.

Pour $X \in L^2$, variance et écart type de X .

Relation $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

Relation $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

Variance d'une variable géométrique, d'une variable de Poisson.

Covariance de deux variables aléatoires de L^2 .

Relation $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) E(Y)$. Cas de variables indépendantes.

Variance d'une somme de n variables aléatoires, cas de variables décorréliées.

La notation $X \in L^2$ signifie que X^2 est d'espérance finie. On ne soulèvera aucune difficulté quant à la définition précise de L^2 .

Cas d'égalité.

Notations $V(X), \sigma(X)$. Variables réduites.

Caractérisation des variables aléatoires de variance nulle.

Si $\sigma(X) > 0$, la variable aléatoire $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

j) Inégalités probabilistes et loi faible des grands nombres

Inégalité de Markov.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Loi faible des grands nombres : si $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite i.i.d. de variables aléatoires de variance finie, alors, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

où $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $m = E(X_1)$.

Utilisation des inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev pour établir des inégalités de concentration.

k) Fonctions génératrices

Fonction génératrice de la variable aléatoire X à valeurs

$$\text{dans } \mathbb{N} : G_X(t) = E(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) t^k.$$

Détermination de la loi de X par G_X .

La variable aléatoire X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1 ; dans ce cas $E(X) = G_X'(1)$.

Fonction génératrice d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans \mathbb{N} .

La série entière définissant G_X est de rayon supérieur ou égal à 1 et converge normalement sur le disque fermé de centre 0 et de rayon 1. Continuité de G_X .

La démonstration de la réciproque n'est pas exigible.

Utilisation de G_X pour le calcul de $E(X)$ et $V(X)$.

Les étudiants doivent savoir calculer rapidement la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.

Équations différentielles linéaires

La notion générale d'équation différentielle linéaire est introduite à partir des exemples étudiés en première année : équation scalaire d'ordre 1, équation scalaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.

La pratique de la résolution explicite des systèmes linéaires à coefficients constants n'est pas un objectif du programme. On limite en conséquence la technicité des exercices sur ce point. On peut en revanche présenter aux étudiants divers exemples d'études qualitatives d'équations différentielles linéaires scalaires ou de systèmes linéaires. Concernant les systèmes à coefficients constants, on pourra souligner le rôle du signe des parties réelles des valeurs propres de la matrice ; on pourra également, en dimension 2, représenter les courbes intégrales.

Dans cette section, I est un intervalle de \mathbb{R} , E un espace normé de dimension finie.

a) Généralités

Équation différentielle linéaire :

$$x' = a(t) \cdot x + b(t)$$

où a est une application continue de I dans $\mathcal{L}(E)$ et b une application continue de I dans E .

Problème de Cauchy.

Représentation d'une équation scalaire linéaire d'ordre n par un système différentiel linéaire.

Problème de Cauchy pour une équation linéaire scalaire d'ordre n .

Forme matricielle : système différentiel linéaire

$$X' = A'(t)X + B(t).$$

Équation différentielle homogène associée à une équation différentielle linéaire. Principe de superposition.

Mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy.

b) Solutions d'une équation différentielle linéaire

Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

Cas des équations scalaires d'ordre n .

Cas des équations homogènes : l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, E)$. Pour t_0 dans I , l'application $x \mapsto x(t_0)$ est un isomorphisme de cet espace sur E .

Dimension de l'espace des solutions. Cas des équations scalaires homogènes d'ordre n .

Structure de l'ensemble des solutions d'une équation avec second membre.

Exemples d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2 non normalisées :

$$a(t)x' + b(t)x = c(t), \quad a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = d(t).$$

La démonstration n'est pas exigible.

Adaptation aux systèmes différentiels linéaires.

Exemples de recherche de solutions développables en série entière.

c) Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice

Exponentielle d'un endomorphisme d'un espace normé de dimension finie, d'une matrice réelle ou complexe.
 Exponentielle d'une matrice diagonale. Exponentielle de matrices semblables. Spectre de $\exp(A)$.
 Continuité de l'exponentielle sur $\mathcal{L}(E)$, sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
 Dérivation de $t \mapsto \exp(ta)$ de $t \mapsto \exp(tA)$.
 Exponentielle de la somme de deux endomorphismes, de deux matrices carrées, qui commutent.

Notations $\exp(a)$, e^a , $\exp(A)$, e^A .

d) Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

Résolution du problème de Cauchy

$$x' = a(x), \quad x(t_0) = x_0$$

si a est un endomorphisme de E et x_0 un élément de E .

Traduction matricielle.

Pour les calculs explicites, on se limite aux deux cas suivants : a diagonalisable ou $\dim(E) \leq 3$.

e) Variation des constantes

Pour une équation différentielle linéaire scalaire homogène d'ordre 2, wronskien d'un couple de solutions. Caractérisation des bases de l'espace des solutions.
 Méthode de variation des constantes pour les équations différentielles linéaires d'ordre 2.

Calcul différentiel et optimisation

En première année, l'étudiant a rencontré les dérivées partielles d'une fonction numérique définie sur un ouvert de \mathbb{R}^2 . Les objectifs de cette section sont les suivants :

- généraliser et approfondir cette étude, en présentant les notions fondamentales de calcul différentiel dans le cadre des espaces vectoriels normés de dimension finie sur \mathbb{R} ;
- donner une introduction à la thématique de l'optimisation, en lien avec le théorème des bornes atteintes du cours de topologie.

On souligne le caractère géométrique des notions. En particulier, on exploite la possibilité de se ramener, pour un certain nombre de questions, à des fonctions d'une variable réelle, à travers l'utilisation de la formule donnant la dérivée d'une fonction le long d'un arc et la notion de vecteur tangent à une partie en un point.

Les fonctions considérées dans cette section sont définies sur un ouvert d'un \mathbb{R} -espace vectoriel normé E de dimension finie et à valeurs dans un \mathbb{R} -espace vectoriel normé F de dimension finie.

Le choix d'une base de l'espace d'arrivée permet de se ramener au cas des fonctions à valeurs réelles.

a) Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles

Dérivée de l'application f au point a selon le vecteur v .

Notations $D_v f(a)$, $D_v f$.

Dérivées partielles dans une base.

Notations $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $\partial_i f(a)$.

Lorsqu'une base de E est fixée, identification entre $f(x)$ et $f(x_1, \dots, x_n)$.

b) Différentielle

Application différentiable au point a .

Notation $o(h)$. Développement limité à l'ordre 1.

Lorsque $f = (f_1, \dots, f_p)$, f est différentiable en a si et seulement si toutes les f_i le sont.

Si f est différentiable en a , alors f est continue en a et dérivable en a selon tout vecteur.

Différentielle de f en a , encore appelée application linéaire tangente à f en a . Unicité de la différentielle et relation $df(a) \cdot v = D_v f(a)$.

Application différentiable sur un ouvert Ω . Différentielle sur Ω .

Cas particuliers : application constante, application linéaire.

Lien entre différentielle et dérivées partielles.

Cas des fonctions d'une variable : si Ω est un intervalle ouvert de \mathbb{R} , la différentiabilité de f en a équivaut à la dérivabilité de f en a ; relation $f'(a) = df(a) \cdot 1$.

Si l'espace E est euclidien, gradient en a d'une application numérique différentiable en a . Expression du gradient en base orthonormée.

Notation $df(a)$.

Notation df .

Si Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n et si f est à valeurs dans \mathbb{R}^m , la matrice jacobienne de f en a est la matrice de $df(a)$ dans les bases canoniques.

Notation $\nabla f(a)$.

Interprétation géométrique : si $\nabla f(a) \neq 0$, $\nabla f(a)$ est positivement colinéaire au vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale.

c) Opérations sur les applications différentiables

Différentielle d'une combinaison linéaire d'applications différentiables, de $M(f_1, \dots, f_p)$ où M est multilinéaire et où f_1, \dots, f_p sont des applications différentiables.

Règle de la chaîne : différentielle d'une composée d'applications différentiables.

Dérivée le long d'un arc : si γ est une application définie sur l'intervalle I de \mathbb{R} , dérivable en t , si f est différentiable en $\gamma(t)$, alors $(f \circ \gamma)'(t) = df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$.

Dérivées partielles d'une composée d'applications différentiables.

Interprétation géométrique en termes de tangentes.

Cas particulier fondamental : $\gamma(t) = x + tv$.

Dérivation de $t \mapsto f(x_1(t), \dots, x_n(t))$.

Dérivées partielles de

$$(u_1, \dots, u_m) \mapsto f(x_1(u_1, \dots, u_m), \dots, x_n(u_1, \dots, u_m)).$$

d) Applications de classe \mathcal{C}^1

Une application f est dite de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert Ω si elle est différentiable sur Ω et si df est continue sur Ω . L'application f est de classe \mathcal{C}^1 sur Ω si et seulement si les dérivées partielles relativement à une base de E existent en tout point de Ω et sont continues sur Ω .

Opérations algébriques sur les applications de classe \mathcal{C}^1 . Si f est une application de classe \mathcal{C}^1 de Ω dans F , si γ est une application de classe \mathcal{C}^1 de $[0, 1]$ dans Ω , si $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$, alors :

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Si Ω est connexe par arcs, caractérisation des fonctions constantes sur Ω .

La démonstration n'est pas exigible.

Cas particulier $\gamma(t) = a + tv$ pour tout $t \in [0, 1]$.

Démonstration pour Ω convexe.

e) Vecteurs tangents à une partie d'un espace normé de dimension finie

Si X est une partie de E et x un point de X , un vecteur v de E est tangent à X en x s'il existe $\varepsilon > 0$ et un arc γ défini sur $] -\varepsilon, \varepsilon[$, à valeurs dans X , dérivable en 0, tel que $\gamma(0) = x, \gamma'(0) = v$.

Notation $T_x X$ pour l'ensemble des vecteurs tangents à X en x .

Exemples : sous-espace affine, sphère d'un espace euclidien, graphe d'une fonction numérique définie sur un ouvert de \mathbb{R}^2 .

Si g est une fonction numérique définie et de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert Ω de E , si $x \in X$ et $dg(x) \neq 0$, alors $T_x X$ est égal au noyau de $dg(x)$.

La démonstration de cet énoncé et le théorème des fonctions implicites sont hors programme.
Traduction en termes de gradient si E est euclidien, en particulier pour $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.
Exemple : plan tangent à une surface de \mathbb{R}^3 définie par une équation.

f) Optimisation : étude au premier ordre

Point critique d'une application différentiable.
Condition nécessaire d'existence d'un extremum local en un point intérieur.
Si f est une fonction numérique définie sur l'ouvert Ω , si X est une partie de Ω , si la restriction de f à X admet un extremum local en x et si f est différentiable en x , alors $df(x)$ s'annule en tout vecteur tangent à X en x .
Théorème d'optimisation sous une contrainte : si f et g sont des fonctions numériques définies et de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert Ω de E , si X est l'ensemble des zéros de g , si $x \in X$ et $dg(x) \neq 0$ et si la restriction de f à X admet un extremum local en x , alors $df(x)$ est colinéaire à $dg(x)$.

Exemples de recherches d'extremums globaux.

Si E est euclidien, traduction en termes de gradient.
Exemples de recherches d'extremums sous contrainte.

g) Applications de classe \mathcal{C}^k

Dérivées partielles d'ordre k d'une fonction définie sur un ouvert de \mathbb{R}^n .
Une application est dite de classe \mathcal{C}^k sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^n si ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues sur Ω .
Théorème de Schwarz.
Opérations algébriques sur les applications de classe \mathcal{C}^k .
Composition d'applications de classe \mathcal{C}^k .

Notations $\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_k} \dots \partial x_{j_1}}, \partial_{j_k} \dots \partial_{j_1} f, \partial_{j_1, \dots, j_k} f$.

La notion de différentielle seconde est hors programme.

La démonstration n'est pas exigible.
Les démonstrations ne sont pas exigibles.
Exemples simples d'équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre.

h) Optimisation : étude au second ordre

Matrice hessienne en un point d'une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un ouvert de \mathbb{R}^n , à valeurs réelles.
Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 :

Notation $H_f(x)$.

La démonstration n'est pas exigible.

$$f(x+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(x) \cdot h, h \rangle + o(\|h\|^2),$$

$$f(x+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(x) + \nabla f(x)^\top h + \frac{1}{2} h^\top H_f(x) h + o(\|h\|^2).$$

Si f est une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un ouvert de \mathbb{R}^n et si f admet un minimum local en x , alors x est point critique de f et $H_f(x) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
Si f est une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un ouvert de \mathbb{R}^n , si x est point critique de f et si $H_f(x) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors f atteint un minimum local strict en x .

Adaptation au cas d'un maximum local.

Adaptation au cas d'un maximum local.
Explicitation pour $n = 2$ (trace et déterminant).